Листок 2, 9 сентября 2024 г.

Определим $(G : H)$ – *индекс* подгруппы H в группе G как количество смежных классов G по H.

Задача 1. Докажите, что подгруппа индекса 2 нормальна.

Задача 2. Пусть дана цепочка подгрупп $K \subset H \subset G$. Покажите, что $(G : K) = (G : H)(H : K)$.

Задача 3. Пусть дана цепочка подгрупп $K \subset H \subset G$. Пусть K нормальна в H, H нормальна в G. Верно ли, что K нормальна в G?

Задача 4. Пусть дана цепочка подгрупп $K \subset H \subset G$. Пусть H и K нормальны в G. Докажите, что $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.

Задача 5. Пусть G – группа, и пусть $S \subset G$ – подмножество. Определим *нормализатор* множества S в G следующим образом:

$$N_S = \{g \in G \mid gSg^{-1} \subset S\}.$$

Определим *централизатор* множества S в G следующим образом:

$$Z_S = \{g \in G \mid gs = sg \ \forall s \in S\}.$$

Проверьте, что централизатор и нормализатор являются подгруппами. Нормальны ли они?

Задача 6. *Центром* Z_G группы G называется подмножество элементов, которые коммутируют со всеми элементами G. Проверьте, что центр является нормальной подгруппой. Вычислите центр симметрической группы S_n.

Задача 7. Пусть G_1, G_2 – абелевы группы. Обозначим множество гомоморфизмов из G_1 в G_2 через $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$.

- Определите естественную операцию сложения гомоморфизмов и покажите, что $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ обладает структурой абелевой группы.
- Вычислите $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ для $n, m \geqslant 0$.

Задача 8. Могут ли две неизоморфные группы иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные фактор-группы по ним? Может ли группа иметь две изоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым неизоморфны? Может ли группа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, фактор-группы по которым изоморфны?

Задача 9. (Теорема Кэли) Докажите, что любая группа изоморфна подгруппе симметрической группы.