

Листок 3, 16 сентября 2024 г.

Задача 1. Есть ли в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Изоморфная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Задача 2. Если $K, H \subset G$ и $H \subset N_K$, докажите что $H/(H \cap K) \simeq HK/K$, где HK – подгруппа, порожденная элементами вида $h \cdot k, h \in H, k \in K$.

Задача 3. Опишите все перестановки, которые могут быть разложены в произведение циклов длины три.

Задача 4. Постройте сюръективный гомоморфизм $S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для любого $n \geq 2$.

Задача 5. Постройте сюръективный гомоморфизм $S_4 \rightarrow S_3$.

Задача 6. Докажите, что любую перестановку из S_n можно получить, перемножая транспозицию $(1, n)$ и цикл $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Задача 7. Пусть перестановка $\sigma \in S_n$ разложена в произведение l независимых циклов длин $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_l \geq 1$. Выпишите формулу для

1. четности σ ,
2. порядка перестановки σ ,
3. порядка класса сопряженности σ ,
4. количества перестановок, коммутирующих с σ .

Задача 8. Найдите центр группы перестановок S_n . Найдите центр группы невырожденных матриц $\text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Задача 9. Докажите, что подгруппа внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(G)$ нормальна в группе автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. Докажите, что $\text{Inn}(G) \simeq G/Z_G$.

Задача 10. Докажите, что если $|G| = p^n$, где p – простое, то $|Z_G| = p^k$ для $k > 0$.

Задача 11. Покажите, что невырожденные 2×2 матрицы с коэффициентами из $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ образуют группу. Обозначим ее $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Докажите, что она изоморфна S_3 .