Листок 4, 23 сентября 2024 г.

Задача 1. Найдите группы обратимых элементов в кольцах (здесь $\mathbb{K}$ – произвольное поле):

1. $\mathbb{K}[x]$,
2. $\mathbb{K}[[x]]$,
3. $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

Задача 2. Докажите изоморфизмы колец:

1. $\mathbb{K}[x]/f(x)\mathbb{K}[x] \simeq \mathbb{K}$, если $f(x)$ – многочлен степени 1,
2. $\mathbb{R}[x]/f(x)\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{C}$, если $f(x)$ – многочлен степени 2, не имеющий вещественных корней.

Задача 3. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Докажите, что $\mathbb{K}[x]/(x^2+x+1)\mathbb{K}[x]$ – поле.

Задача 4. Пусть I_i – идеалы в кольце A. Докажите, что

1. $I_1 + I_2$ – идеал,
2. $I_1 I_2 = \{\sum x_i y_i \mid x_i \in I_1, y_i \in I_2\}$ – идеал,
3. $\cap_{i\in J} I_i$ – идеал, где J – произвольное множество индексов,
4. $(I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3)$,
5. $I_1(I_2 + I_3) = I_1 I_2 + I_1 I_3$.

Задача 5. Пусть I, J, K – идеалы в кольце A. Определим подмножество $(I : J)$ кольца A следующим образом:

$$(I : J) = \{a \in A \mid aJ \subset I\}.$$

Покажите, что это идеал. Докажите, что

1. $I \subset (I : J)$,
2. $(I : J)J \subset I$,
3. $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.

Задача 6. Докажите, что прообраз простого идеала при гомоморфизме колец является простым идеалом. Является ли прообраз максимального идеала максимальным?

Задача 7. Пусть $I \subset A$ – идеал в кольце. Докажите, что A/I не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда I прост. Докажите, что A/I является полем тогда и только тогда, когда I максимален.

Задача 8. Пусть A – целостное кольцо. Докажите, что кольца $A[x]$ и $A[[x]]$ – целостные. Опишите их поля частных.

Задача 9. Докажите, что кольцо $\mathbb{K}[[x]]$ нетерово и факториально. Перечислите все простые идеалы в нем.

Задача 10. (Лемма об избегании простых идеалов) Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ – простые идеалы в кольце A, и пусть I – идеал в A. Пусть $I \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Докажите, что $I \subset \mathfrak{p}_i$ для некоторого i.

Назовем кольцо A *артиновым*, если в нем выполняется условие стабилизации для убывающих цепочек идеалов. Иными словами, если дана последовательносить идеалов

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

то существует такое n, что

$$I_n = I_{n+1} = \dots$$

Задача 11. Докажите, что кольцо $\mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$ – артиново.

Задача 12. Постройте пример артинова кольца, в котором бесконечно много идеалов.

Задача 13. * Докажите, что в артиновом кольце имеется лишь конечное число простых идеалов.

Задача 14. * Пусть A – нетерово кольцо. Докажите, что кольца $A[x]$ и $A[[x]]$ нетеровы.