Листок 5, 30 сентября 2024 г.

Все кольца в этом листке предполагаются коммутативными.

Задача 1. Опишите все простые и максимальные идеалы в кольцах $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{K}[x]$, где $\mathbb{K}$ – поле.

Задача 2. Элемент x кольца A называется *простым*, если порожденный им идеал (x) прост. Необратимый элемент x целостного кольца A называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух необратимых элементов A.

Покажите, что в целостном кольце ненулевой простой элемент неприводим. Покажите, что обратное, вообще говоря, неверно. Покажите, что в факториальных кольцах неприводимые элементы просты.

Задача 3. Пусть A – ненулевое кольцо. Следующие утверждения равносильны:

1. A – поле,
2. в A нет идеалов, кроме (0) и (1),
3. любой гомоморфизм из A в ненулевое кольцо инъективен.

Задача 4. Элемент $0 \neq x \in A$ называется нильпотентом, если $x^n = 0$ для некоторого n. Докажите, что множество всех нильпотентов в A является идеалом. Он называется *нильрадикалом* кольца A и обозначается $\mathfrak{R}(A)$. Покажите, что в фактор-кольце $A/\mathfrak{R}(A)$ нет нильпотентов.

Задача 5. Докажите, что нильрадикал кольца A совпадает с пересечением всех простых идеалов A.

Задача 6. *Радикалом Джекобсона* $\mathfrak{J}(A)$ кольца A называется пересечение всех максимальных идеалов в A. Докажите, что $x \in \mathfrak{J}(A)$ эквивалентно тому, что $1 - xy$ является обратимым элементов для всех $y \in A$.

Задача 7. Кольцо A называется *конечно порожденным*, если существует сюръективный гомоморфизм колец $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow A$. Верно ли, что если A – нетерово, то всякое подкольцо A конечно порождено?

Задача 8. *Радикалом* $R(I)$ идеала $I \subset A$ назовем множество

$$R(I) = \{a \in A \mid a^n \in I\},$$

где в определении n зависит от a.

1. Покажите, что $R(I)$ – идеал в A, и $I \subset R(I)$.
2. Покажите, что $R(R(I)) = R(I)$.
3. Покажите, что $R(I)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих I.
4. Пусть I_1, I_2 – идеалы в A. Покажите, что $R(I_1 \cap I_2) = R(I_1) \cap R(I_2) = R(I_1 I_2)$.

5. Пусть I_1, I_2 – идеалы в A. Покажите, что $R(I_1+I_2) = R(R(I_1)+R(I_2))$.

6. Покажите, что в нетеровом кольце A для идеала I существует число N такое, что $R(I)^N \subset I \subset R(I)$.

Задача 9. Определим кольцо гауссовых чисел (здесь $i = \sqrt{-1}$)

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Покажите, что оно целостно, евклидово и факториально.

2. Найдите в нем все обратимые элементы.

Задача 10. Докажите, что простое натуральное число p является простым числом Гаусса тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решения по модулю p, то есть -1 не является квадратом по модулю p.

Задача 11. Докажите, что простое натуральное число является простым числом Гаусса тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4k - 1$.

Задача 12. Опишите множество всех натуральный числа, представимых в виде суммы двух квадратов.

Задача 13. Определим кольцо чисел Эйзенштена (здесь $\rho = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$)

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + \rho b \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Покажите, что оно целостно, евклидово и факториально.

2. Найдите в нем все обратимые элементы.

Задача 14. Докажите, что простое натуральное число p является простым числом Эйзенштейна тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет решения по модулю p, то есть либо $p = 2$, либо -3 не является квадратом по модулю p.

Задача 15. Докажите, что простое натуральное число является простым числом Эйзенштейна тогда и только тогда, когда оно равно 2 или имеет вид $6k - 1$.