Листок 6, 7 октября 2024 г.

Задача 1. Пусть A – кольцо. Докажите изоморфизмы A-модулей:

1. $\mathrm{Hom}_A(A, M) \simeq M$,
2. $\mathrm{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M_2, N)$,
3. $\mathrm{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$.

Задача 2. Какие из следующих модулей являются свободными? Конечно порожденными?

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$,
2. $A = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$,
3. $A = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{C}$,
4. $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $M = \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Задача 3. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме для модулей.

Задача 4. Пусть A – коммутативное кольцо. Назовем A-модуль *нетеровым* (соотв., *артиновым*), если любая возрастающая (соотв., убывающая) цепочка подмодулей в нем стабилизируется. Пусть дана точная последовательность A-модулей

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0.$$

Докажите, что M_2 нетерово (соотв., артиново) тогда и только тогда, когда M_1 и M_3 нетерово (соотв., артиновы).

Задача 5. Пусть A – артиново коммутативное кольцо. Пусть M – конечно порожденный A-модуль. Докажите, что M артинов.

Задача 6. Пусть A – коммутативное кольцо. Пусть дана последовательность A-модулей

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0. \tag{1}$$

Докажите, что индуцированная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N)$$

точна для любого A-модуля N тогда и только тогда, когда (1) точна. Докажите аналогичное утверждение, заменив $\mathrm{Hom}(-, N)$ на $\mathrm{Hom}(N, -)$.

Задача 7. Чему изоморфен $\mathbb{Z}$-модуль $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Задача 8. Пусть A – коммутативное кольцо. Пусть дана точная последовательность A-модулей

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0 \tag{2}$$

Верно ли, что следующая последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(M_3, N) \to \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N) \to 0$$

точна? А если заменить $\mathrm{Hom}(-, N)$ на $\mathrm{Hom}(N, -)$?

Задача 9. Пусть A – коммутативное кольцо. Рассмотрим коммутативную диаграмму A-модулей с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\psi_1"] & N_2 \arrow[r, "\psi_2"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Докажите, что имеется индуцированная точная последовательность A-модулей

$$0 \to \mathrm{Ker}(f_1) \to \mathrm{Ker}(f_2) \to \mathrm{Ker}(f_3) \to \mathrm{Coker}(f_1) \to \mathrm{Coker}(f_2) \to \mathrm{Coker}(f_3) \to 0.$$

Задача 10. Пусть A – коммутативное кольцо.

1. Пусть M – нетеров A-модуль. Докажите, что если гомоморфизм $\phi\colon M \to M$ сюръективен, то ϕ – изоморфизм.

2. Пусть M – артинов A-модуль. Докажите, что если гомоморфизм $\phi\colon M \to M$ инъективен, то ϕ – изоморфизм.

Задача 11. Пусть A – коммутативное кольцо.

1. Предположим, что $A^{\oplus n} \simeq A^{\oplus m}$ для некоторых $n, m \geqslant 1$. Докажите, что $n = m$.

2. Предположим, что существует сюръективный гомоморфизм $A^{\oplus n} \to A^{\oplus m}$ для некоторых $n, m \geqslant 1$. Докажите, что $n \geqslant m$. Верно ли, что если гомоморфизм $A^{\oplus n} \to A^{\oplus m}$ инъективен, то $n \leqslant m$?