

Листок 7, 21 октября 2024 г.

Задача 1. Постройте базисы над полем \mathbb{K} в кольцах: матриц $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$; верхнетреугольных матриц; многочленов с коэффициентами в \mathbb{K} . Запишите законы умножения в этих базисах.

Задача 2. Постройте канонические изоморфизмы

1. $U + W \simeq U \oplus W / (U \cap W)$ для подпространств $U, W \subset V$,
2. $(U + W)/U \simeq W/(U \cap W)$ для подпространств $U, W \subset V$,
3. $V/(U + W) \simeq (V/U)/(W/(U \cap W))$ для подпространств $U, W \subset V$,
4. $V/U \simeq (V/W)/(U/W)$ для подпространств $W \subset U \subset V$.

Задача 3. Постройте канонический изоморфизм $V \simeq U \oplus V/U$, где $U \subset V$.

Задача 4. Докажите, что

1. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ для подпространств $U, W \subset V$,
2. $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$ для пространств U, W ,
3. $\dim V = \dim U + \dim V/U$ для подпространства $U \subset V$,
4. $\dim V - \dim U = \dim V/(\text{Im}(f)) - \dim \text{Ker}(f)$ для гомоморфизма $f: U \rightarrow V$.

Задача 5. Докажите, что целочисленными элементарными преобразованиями строк и столбцов любую целочисленную матрицу можно привести к диагональному виду с числами d_1, \dots, d_k на диагонали, так что $d_1 \mid \dots \mid d_k$.

Задача 6. Докажите, что подгруппа свободной конечно порожденной абелевой группы свободна и конечно порождена. Докажите, что любая свободная конечно порожденная абелева группа изоморфна

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$$

для некоторых d_1, \dots, d_k , так что $d_1 \mid \dots \mid d_k$. Единственно ли такое разложение?

Задача 7. Верно ли, что подмодуль свободного модуля свободен?

Задача 8. Пусть V – векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p – простое число. Найдите число элементов в V ; число упорядоченных наборов из k линейной независимых элементов; число k -мерных векторных подпространств.

Задача 9. Может ли поле из 8 элементов содержать подполе из 4 элементов?

Задача 10. Найдите размерность векторного пространства многочленов от n переменных над полем таких, что их степень не превосходит k ; однородных многочленов степени k от n переменных.