Листок 8, 28 октября 2024 г.

Задача 1. Пусть $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, A и B нильпотентны и $AB = BA$. Докажите, что $A + B$, AB нильпотентны. Верно ли это без условия $AB = BA$?

Задача 2. Докажите формулу для определителя матрицы Вандермонда:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j)$$

Задача 3. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Покажите, что если для любого $X \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ имеем $\mathrm{tr}(AX) = 0$, то $A = 0$.

Задача 4. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Покажите, что если $\mathsf{rk}(A) = n$, то $\mathsf{rk}(\widehat{A}) = n$; если $\mathsf{rk}(A) = n - 1$, то $\mathsf{rk}(\widehat{A}) = 1$; если $\mathsf{rk}(A) \leqslant n - 2$, то $\widehat{A} = 0$.

Задача 5. Покажите, что $\mathsf{rk}(AB) \leqslant \mathsf{rk}(A)$; $\mathsf{rk}(AB) \leqslant \mathsf{rk}(B)$, $\mathsf{rk}(A+B) \leqslant \mathsf{rk}(A) + \mathsf{rk}(B)$.

Задача 6. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, и пусть $\mathsf{rk}(A) = r$. Покажите, что $A = BC$, где $B \in \mathrm{Mat}_{m\times r}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{r\times n}(K)$. Насколько однозначно такое представление?

Задача 7. Системой линейных уравнений будем называть систему следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

записываемую кратко в виде $Ax = b$, где $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $b \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$, x – столбец неизвестных. Докажите, что

1. множество решений системы $Ax = 0$ является векторным пространством размерности $n - \mathsf{rk}(A)$;
2. либо множество решений системы $Ax = b$ пусто, либо на нем свободно и транзитивно действует множество решений системы $Ax = 0$;
3. множество решений системы $Ax = b$ непусто тогда и только тогда, когда $\mathsf{rk}(A) = \mathsf{rk}(A|b)$.

Задача 8. Пусть R – коммутативное кольцо, M – R-модуль, и $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Покажите, что если для любого $x \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(M)$ имеем $Ax = 0$, то $(\det A)M = 0$.

Задача 9. Найдите ЖНФ операторов $(d/dt)^k$ в $\{f \in K[t] \mid \deg f \leqslant n\}$; t в $\mathbb{C}[t]/p(t)$, где p – многочлен.

Задача 10. Докажите единственность разложения Жордана.

Задача 11. Опишите орбиты и стабилизаторы для действия $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ сопряжением: $g\cdot A \mapsto gAg^{-1}$; для действия $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ на $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{C})$ по правилу: $(g_1, g_2)\cdot A \mapsto g_1 A g_2^{-1}$.