Листок 9, 11 ноября 2024 г.

Задача 1. Докажите, что $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$ влечет $(x - \alpha) | f(x)$ (теорема Безу). Докажите, что многочлен степени n над полем имеет не более n различных корней. Докажите, что группа

$$\mu_n(\mathbb{K}) = \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \alpha^n = 1\}$$

содержит не больше, чем n элементов.

Задача 2. Докажите, что конечная подгруппа мультипликативной группы поля циклична.

Задача 3. Докажите, что если $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$, то $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\sqrt{a}]$, где $a \in \mathbb{K}$.

Задача 4. Найдите $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ и $\mathrm{Irr}_\alpha^{\mathbb{K}}(x)$ для

- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;
- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $\alpha = 1 + \sqrt{2}$.

Задача 5. Для полей $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(\alpha)$ из предыдущей задачи найдите все промежуточные подполя $\mathbb{L}$, то есть такие, что $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{K}(\alpha)$.

Задача 6. Докажите, что $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Задача 7. Найдите группу $\mu(\mathbb{K}) = \cup_n \mu_n(\mathbb{K})$ для следующих полей: $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Задача 8. Пусть $\mathbb{F}$ – конечное поле. Докажите, что любая функция $f\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ является многочленом. Приведите пример двух различных многочленов, задающих одинаковую функцию.

Задача 9. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле характеристики p и $\phi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $x \mapsto x^p$ – отображение. Докажите, что это гомоморфизм (гомоморфизм Фробениуса). Приведите два примера бесконечных полей характеристики p таких, что в первом случае ϕ биективен, а во втором – нет.