Eine Bemerkung über inhomogene Approximation: ein kleines Opfer für Seigo Morimoto

Nikolay Moshchevitin

1. Eine Behauptung. In den Jahren 1926-38 hat Morimoto (Fukasawa) einige Artikel [3] über inhomogene diophantische Approximationen für eine reelle Zahl veröffentlicht. Dort führte er bestimmte Algorithmen für die besten diophantischen Approximationen ein und verwendete spezielle Kettenbrüche als Hilfsmittel. Obwohl er einige Konstruktionen aus dem Werk von Khintchine [6] verwendete, in denen das Phänomen der Singularität entdeckt wurde, bewies er die folgende Behauptung nicht.

Satz 1. *Sei $\omega(t)$ eine positive, abnehmende Funktion mit*

$$\omega(t) < \frac{1}{t} \tag{1}$$

und $\omega_1(t) = \frac{\omega(4t)}{4}$. Betrachten wir die irrationale Zahl

$$\xi = \cfrac{1}{a_1 + \ldots + \cfrac{1}{a_j + \cfrac{1}{a_{j+1} + \ldots}}} = [0; a_1, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots], \quad a_\nu \in \mathbb{Z}_+$$

mit

$$a_{\nu+1} \geqslant (q_\nu \omega_1(q_\nu))^{-1}, \quad \textit{wobei} \ \ \frac{p_\nu}{q_\nu} = [0; a_1, \ldots, a_\nu], \ \ (p_\nu, q_\nu) = 1. \tag{2}$$

Wir definieren

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu, \quad \textit{wobei} \ \ \xi_\nu = q_\nu \xi - p_\nu. \tag{3}$$

Dann gilt für jedes $t \geqslant 1$ die Ungleichung

$$0 < \psi_{\xi,\eta}(t) = \min_{q \leqslant t} ||q\xi - \eta|| \leqslant \omega(t), \quad \textit{wobei} \ \ ||a|| = \min_{b \in \mathbb{Z}_+} |a - b|.$$

Wir glauben, dass die Artikel von Morimoto dies enthalten haben könnten. Das Ziel dieses kurzen Artikels ist es, Satz 1 zu dokumentieren, einige Folgerungen zu ziehen und eine mehrdimensionale Verallgemeinerung zu beweisen. In Abschnitt 2 formulieren wir zwei Folgerungen zu Satz 1. In Abschnitt 3 geben wir einleitende Überlegungen zu den besten Approximationen. In Abschnitt 4 formulieren wir einen allgemeinen Satz 4. Satz 1 ist ein Sonderfall ($n = 1$) des Ergebnisses aus Abschnitt 4. Obwohl das Phänomen der Singularität seit mehr als 100 Jahren bekannt ist, glauben wir, dass Fakten wie Satz 1 und Satz 4 nie dokumentiert wurden. Wahrscheinlich lassen sie sich aus dem axiomatischen Ansatz der Arbeit [7] ableiten.

2. Die Folgerungen. Es gibt zwei Folgerungen von Satz 1.

1) Seien ξ und η reelle Zahlen. Wir definieren diophantische Exponenten

$$\varkappa(\xi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n}$$

und

$$\hat{\omega}(\xi,\eta) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} : \limsup_{t\to\infty} t^{\gamma} \cdot \psi_{\xi,\gamma}(t) < \infty\}.$$

Folgerung 2. *Für jedes ξ gibt es η mit $\hat{\omega}(\xi,\eta) \geqslant \varkappa(\xi)$.*

2) Seien α, β zwei reelle Zahlen mit $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$. Im Jahr 2010 haben Kan und Moshchevitin [5] bewiesen, dass die Differenz $\psi_{\alpha,0}(t) - \psi_{\beta,0}(t)$ unendlich oft ihr Vorzeichen wechselt wenn $t \to \infty$. Satz 1 zeigt, dass ein solches Ergebnis in der allgemeinen inhomogenen Situation nicht gültig ist.

Folgerung 3. *Annehmen wir, dass $1, \xi, \eta$ linear unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen sind. Dann gibt es ξ_1 und η_1 mit*

$$0 < \psi_{\xi_1,\eta_1}(t) < \psi_{\xi,\eta}(t) \quad \forall\, t \geqslant 1.$$

3. Beste simultane Approximationen. Sei $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Wir bezeihnen

$$|\boldsymbol{\xi}| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\xi_j| \quad \text{und} \quad ||\boldsymbol{\xi}|| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} ||\xi_j||.$$

Wir betrachten die Folge der Bestapproximationsvektoren

$$\boldsymbol{z}_\nu = (q_\nu, \boldsymbol{a}_\nu) = (q_\nu, a_{\nu,1}, ..., a_{\nu,d}) \in \mathbb{Z}^{d+1}, \quad \nu = 0,1,2,3,... \quad (q_0 = 1)$$

für $\boldsymbol{\xi}$ in sup-Norm (siehe [1, 10]). Dann $1 = q_0 < q_1 < ... < q_\nu < q_{\nu+1} < ...$ und

$$\min_{\substack{(q,a_1,...,a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}\setminus\{\boldsymbol{0}\} :\\ q \leqslant q_\nu,\, (q,a_1,...,a_d) \neq \boldsymbol{z}_\nu}} ||q\boldsymbol{\xi}|| > ||q_\nu\boldsymbol{\xi}|| = \max_{1\leqslant j\leqslant d} |q_\nu\xi_j - a_{\nu,j}|, \quad \forall\,\nu.$$

Jeder Vektor $\boldsymbol{z}_\nu$ ist primitiv. Darüber hinaus ist die Ungleichung

$$||q_\nu\boldsymbol{\xi}|| \geqslant \frac{1}{2q_{\nu+1}} \tag{4}$$

gültig (siehe Theorem 1.5 aus [2]).

Die Nenner q_ν wachsen exponentiell. Definieren wir

$$r_+ = 2^d, \quad r_- = 4^d - 2^d.$$

Dann

$$q_{\nu+r_+} \geqslant 2q_\nu, \quad ||q_{\nu+r_-}\boldsymbol{\xi}|| \leqslant \frac{||q_\nu\boldsymbol{\xi}||}{2}. \tag{5}$$

Die erste Ungleichung aus (5) wurde in der Arbeit [8] von Lagarias bewiesen. Die zweite Ungleichung aus (5) ist eine einfache Verallgemeinerung von Lemma 1 aus [9].

Wir bezeichnen

$$\boldsymbol{\xi}_\nu = (q_\nu\xi_1 - a_{\nu,1}, ..., q_\nu\xi_d - a_{\nu,d}) \in \mathbb{R}^d.$$

4. Mehrdimensionale Verallgemeinerung.

Satz 4. *Sei $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Sei $\omega(t)$ eine positive, abnehmende Funktion, die die Ungleichung (1) erfüllt. Wir definieren*

$$\omega_1(t) = \frac{\omega(2r_+ \cdot t)}{2r_-}. \tag{6}$$

Wir nehmen an, dass die Ungleichung

$$||q_\nu \boldsymbol{\xi}|| < \omega_1(q_\nu) \tag{7}$$

für die besten Approximationen gilt. Wir definiren

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_\nu.$$

Dann gilt für die inhomogene Irrationalitätsmaßfunktion und für jedes $t \geqslant 1$ die folgende Ungleichung

$$0 < \psi_{\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}}(t) = \min_{q \leqslant t} ||q\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| \leqslant \omega(t). \tag{8}$$

Bemerkung 5. Satz 1 folgt aus Satz 2, weil für $d = 1$ die Gleichungen $r_+ = r_- = 2$ gelten und aus (2) die Ungleichung (7) folgt.

Bemerkung 6. Die Annahme (7) ist sehr stark. Das bedeutet, dass der Vektor $\boldsymbol{\xi}$ sehr gute simultane Approximationen hat und die Nenner dieser Approximationen schnell genug wachsen.

Beweis von Satz 4. Definieren wir

$$Q_0 = q_0 = 1, \;\; Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu.$$

Aufgrund von

$$q_\nu \leqslant q_{\nu+1} < ... < q_{\nu+r_+-1}, \quad |\boldsymbol{\xi}_\nu| > |\boldsymbol{\xi}_{\nu+1}| > .... > |\boldsymbol{\xi}_{\nu+r_--1}|$$

aus (5) haben wir

$$Q_{n+1} \leqslant 2(q_{n+1} + q_n + ... + q_{n+1-r_+}) < 2r_+ q_{n+1}, \tag{9}$$

$$||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |\boldsymbol{\xi}_j| \leqslant 2(|\boldsymbol{\xi}_{n+1}| + |\boldsymbol{\xi}_{n+2}| + ... + |\boldsymbol{\xi}_{n+r_-}|) \leqslant 2r_-|\boldsymbol{\xi}_{n+1}| \leqslant 2r_-\omega_1(q_{n+1}) \tag{10}$$

Aus (9,10) und (6,7) folgt

$$||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| = \max_{1 \leqslant j \leqslant d} |Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta} - A_{n,j}| = \left|\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \boldsymbol{\xi}_\nu \right|\right| < 2r_-\omega_1\left(\frac{Q_{n+1}}{2r_+}\right) = \omega(Q_{n+1}) < \frac{1}{2}, \tag{11}$$

wobei $A_{n,j} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu,j}$. Wie definieren $\boldsymbol{A}_n = (A_{n,1}, ..., A_{n,d}) \in \mathbb{Z}^d$.

Nun beweisen wir, dass die Folge

$$Q_0 < Q_1 < ... < Q_n < Q_{n+1} < ...$$

die Folge der allen inhomogenen besten Näherungen von $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ ist, nämlich, dass

(i) für jedes n gilt $||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| > ||Q_{n+1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}||$;

und

(ii) für ganze Zahlen x mit $Q_n < x < Q_{n+1}$ gilt $||x\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| > ||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}||$.

Dies wird zeigen, dass aus Ungleichung (11) die Ungleichung (8) folgt.

Wie beweisen **(i)**. Aus (10) und (1,6,7) folgt, dass die Ungleichung

$$||Q_{n+1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| < \frac{1}{2r_+q_{n+2}} \leqslant \frac{1}{4q_{n+2}} < \frac{|\boldsymbol{\xi}_{n+1}|}{2}$$

gilt. Sodass

$$||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| = || - \boldsymbol{\xi}_{n+1} + (Q_{n+1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|| \geqslant ||\boldsymbol{\xi}_{n+1}|| - ||Q_{n+1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| > ||Q_{n+1}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}||.$$

Um **(ii)** zu beweisen, bemerken wir, dass für x mit $Q_n < x < Q_{n+1}$ und für jedes $\boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^d$ der Gitterpunkt $(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ nicht zum Segment mit den Endpunkten $\boldsymbol{W}_n = (Q_n, \boldsymbol{A}_n)$ und $\boldsymbol{W}_{n+1} = (Q_{n+1}, \boldsymbol{A}_{n+1})$ gehört, weil $\boldsymbol{W}_{n+1} - \boldsymbol{W}_n = \boldsymbol{z}_{n+1}$ ein primitiver Gitterpunkt ist. Sodass die Ungleichungen

$$\left|\left|(x - Q_n)\frac{\boldsymbol{a}_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right| \geqslant \frac{1}{q_{n+1}}$$

und

$$||x\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| = \left|\left|(x - Q_n)\frac{\boldsymbol{a}_{n+1}}{q_{n+1}} + (x - Q_n)\left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{a}_{n+1}}{q_{n+1}}\right) + Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\right|\right| \geqslant \frac{1}{q_{n+1}} - (2r_- + 1)||q_{n+1}\boldsymbol{\xi}||$$

gelten. Hier haben wir Formeln $x\left|\boldsymbol{\xi} - \frac{\boldsymbol{a}_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leqslant ||q_{n+1}\boldsymbol{\xi}||$ und (10) verwendet. Nun haben wir

$$||x\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|| \geqslant \frac{1}{q_{n+1}} - (2r_- + 1)\omega_1(q_{n+1}) \geqslant \frac{1}{q_{n+1}}\left(1 - \frac{2r_- + 1}{4r_-r_+}\right) > \frac{1}{2r_+q_{n+1}} > ||Q_n\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}||.$$

Alles ist bewiesen.

Acknowledgement. Diese Arbeit wurde unterstützt durch FWF Grant No. I 5554.

Literaturverzeichnis

[1] Chevallier N., Best simultaneous Diophantine approximations and multidimensional continued fraction expansions, Mosc. J. Comb. Number Theory **3**:1 (2013), 3-56.

[2] Cheung Y., Hausdorff dimension of set of singular pairs, Ann. Math. **173**:1 (2011),127-167.

[3] Morimoto S., Über die Grössenordnung des absoluten Betrages von einer linearen inhomogenen Form, I - VIII: Teil I dieser Arbeit ist in Japanese Journal of Math. **3** (1926), 1-26 theses Journals veroffentlicht; Teil II ebenda 91-406; Teil III, **4** (1927), 41-48; Teil IV, ebenda, 149-167; Teil V, **5** (1929), 295 -316; Teil VI, **6** (1929), 349-362; Teil VII (Number der Teilen wegnehmend) Tohoku Math, Journal, **38** (1933), 7-33; Teil VII Japanese Journal of Math. **14**, (1938), 189-196 . I-IV enter fruheren Famjlliennahmen S, Fukasawa.

[4] Jarník V., Zum Khintchineschen 'Übertragungssatz, Acad. Sci. URSS, Trav. Inst. Math., Tbilissi **3** (1938), 193-216.

[5] Kan I.D.; Moshchevitin N.G., Approximation to two real numbers, Uniform Distribution Theory **5**:2 (2010), 79-86.

[6] Khintchine A.Ya., Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rend. Circ. Math. Palermo **50** (1926), 170-195.

[7] Kleinbock D., Moshchevitin N., Weiss B., Singular vectors on manifolds and fractals, Israel J. Math. 245 (2021), no. 2, 589–613

[8] Lagarias J., Best simultaneous Diophantine Approximation I. Growth gates of best approximation denominators, Trans. Amer. Math. Soc. **272**:2 (1982), 545-554.

[9] Moschevitin N., The best two-dimensional simultaneous Diophantine approximations in sup-norm. Mosc. Univ. Math. Bull. 60:6 (2005), 29-32.

[10] Moshchevitin N.G., Khintchine's singular Diophantine systems and their applications, Russian Math. Surveys **65**:3 (2010), 433-511.

Autor: Nikolay Moshchevitin
Technische Universität Wien
e-mails: nikolai.moshchevitin@tuwien.ac.at, nikolaus.moshchevitin@gmail.com