Семинар 1. Сжатия и простые примеры

Задача 1. *Привести пример гладкой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ без неподвижных точек, для которой $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для любых различных точек x, y.*

Задача 2. *Пусть отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ —гомеоморфизм прямой. а) Периодические точки с каким периодом оно может иметь? б) Если отображение f не сохраняет ориентацию, может ли оно иметь* 2024 *периодические точки?*

Задача 3. *Пусть A - ω-предельное множество какой-то точки x под действием удвоения окружности. Правда ли, что найдётся точка y для утроения окружности такая, что её ω-предельное множество изометрично A?*

Задача 4. *Пусть $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, задаваемое формулой $f_a(x) = ax(1-x)$. Оно носит название "логистическое отображение".*

1. *Надите максимальное такое число a_{max}, что для любого $a \leq a_{max}$ верно $f_a([0,1]) \subset [0,1]$.*
2. *Найдите такое максимальное число a_1, что для любого $a \leq a_1$ функция f_a имеет только одну периодическую точку, а именно неподвижную.*
3. *Найдите такое максимальное число a_2, что для любого $a_1 < a \leq a_2$ фнукция f_a имеет периодические точки только периода два. Сколько их?*

Задача 5. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, у которого существет точка $x \in \mathbb{R}$ такая, что $f^{\circ 3}(x) < x < f(x) < f^{\circ 2}(x)$. Докажите, что отображение f имеет а) неподвижную точку; б) точку периода 2; в) точку периода 3; г) точку любого наперёд заданного периода.*

Задача 6 (Формула Герона)**.** *Итерационная формула Герона для извлечения квадратного корня из (положительного числа) A устроена так: возьмём произвольное положительное число X_0 и положим:*

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + \frac{A}{X_n}).$$

Тогда последовательность $\{X_i\}$ *сходится к* $\sqrt{A}$*. Докажите это.*

Задача 7 (ММО 1999.10.5)**.** *Кузнечик прыгает по отрезку* $[0;1]$*. За один прыжок он может попасть из точки* x *либо в точку* $\frac{x}{\sqrt{3}}$*, либо в точку* $\frac{x}{\sqrt{3}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$*. На отрезке* $[0;1]$ *выбрана точка* a*. Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше 0.01 от точки* a*.*