Задачи

5 сентября 2024 г.

1 Семинар 1. Сжатия и простые примеры

Задача 1. *Привести пример гладкой функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *без неподвижных точек, для которой* $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ *для любых различных точек* x, y.

Задача 2. *Пусть отображение* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *—гомеоморфизм прямой. а) Периодические точки с каким периодом оно может иметь? б) Если отображение* f *не сохраняет ориентацию, может ли оно иметь* 2024 *периодические точки?*

Задача 3. *Пусть* A *-* ω*-предельное множество какой-то точки* x *под действием удвоения окружности. Правда ли, что найдётся точка* y *для утроения окружности такая, что её* ω*-предельное множество изометрично* A*?*

Задача 4. *Пусть* $f_a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *— непрерывное отображение, задаваемое формулой* $f_a(x) = ax(1 - x)$*. Оно носит название "логистическое отображение".*

1. *Надите максимальное такое число* a_{max}*, что для любого* $a \leq a_{max}$ *верно* $f_a([0, 1]) \subset [0, 1]$.

2. *Найдите такое максимальное число* a_1*, что для любого* $a \leq a_1$ *функция* f_a *имеет только одну периодическую точку, а именно неподвижную.*

3. *Найдите такое максимальное число* a_2*, что для любого* $a_1 < a \leq a_2$ *фнукция* f_a *имеет периодические точки только периода два. Сколько их?*

Задача 5. *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывное отображение, у которого существет точка* $x \in \mathbb{R}$ *такая, что* $f^{\circ 3}(x) < x < f(x) < f^{\circ 2}(x)$. *Докажите, что отображение* f *имеет а) неподвижную точку; б) точку периода 2; в) точку периода 3; г) точку любого наперёд заданного периода.*

Задача 6 (Формула Герона)**.** *Итерационная формула Герона для извлечения квадратного корня из (положительного числа)* A *устроена так: возьмём произвольное положительное число* X_0 *и положим:*

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + \frac{A}{X_n}).$$

Тогда последовательность $\{X_i\}$ *сходится к* $\sqrt{A}$. *Докажите это.*

Задача 7 (ММО 1999.10.5)**.** *Кузнечик прыгает по отрезку* $[0; 1]$. *За один прыжок он может попасть из точки* x *либо в точку* $\frac{x}{\sqrt{3}}$, *либо в точку* $\frac{x}{\sqrt{3}} + (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$. *На отрезке* $[0; 1]$ *выбрана точка* a. *Докажите, что, начиная из любой точки, кузнечик может через несколько прыжков оказаться на расстоянии меньше 0.01 от точки* a.