Семинар 10. Аттракторы.

Задача 1. *Пусть f - гладкое отображение B. Может ли так случиться, что граничная точка аттрактора f переходит во внутреннюю точку аттрактора f[1], если: а) f - диффеоморфизм связного множества на свой образ?, б) f - гладкое отображение, а B может быть не связным множеством?*

Задача 2. *У всякого ли полинома на сфере Римана есть поглощающая область[2]?*

Примечание. *Для комплексной экспоненты $z \to e^z$ этот вопрос куда сложнее. Таких областей нет [3], но ω-предельное множество почти любой (по мере Лебега на сфере) орбиты - это орбита нуля. Разобрав доказательство этого факта в статье «Измеримая динамика экспоненты» М. Любича, вы можете получить бонус +1 решённую задачу в любом листке, но я советую это делать, только если действительно интересно.*

Задача 3 (лемма Хатчинсона). *Пусть $f_1 \dots f_n$ - отображения M, и пусть в M есть шар D такой, что объединение образов $f_1 \dots f_n$ покрывает шар D:*

$$D \subset W = \cup f_i(D)$$

и при этом $f_1 \dots f_n$ сжимают на W (отображая W внутрь себя). Докажите, что для любого шарика $U \in D$ существует такая конечная композиция $F = f_{i_N} \circ \dots \circ f_{i_1}$, что $F(D) \subset U$.

Примечание. *Это утверждение не очень трудно, оригинальная лемма Хатчинсона представляет собой куда более сложное высказывание. Ценность этой леммы в том, что все условия на самом деле «открыты», то есть не исчезают при C^1-малом возмущении отображений.*

Задача 4 (Соленоид Смейла-Вильямса). *Рассмотрим полноторие[4] (внутренность тора) B. Оно является прямым произведением единичного*

[1] Напомним, что максимальный аттрактор – множество $A = \cap_n f^n(B)$.

[2] Открытое связное множество, замыкание которого отображение переводит внутрь этого множества.

[3] Более того, у экспоненты есть плотная орбита, то есть она транзитивна.

[4] Говорят и полноторие, и полноторий.

диска на окружность. Будем записывать координаты точек как (φ, z), *где* $\varphi = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. *Определим отображение полнотория в себя:*

$$f(\varphi, z) = \left(2\varphi, \frac{1}{5}z + \frac{1}{2}e^{2\pi i\varphi}\right).$$

Геометрически опишите образ полнотория под действием f.

Задача 5. *Как выглядит пересечение* $f(B)$ *с диском* $\varphi = const$? *А* $f^2(B)$? *В случае с отображением* f *аттрактор называется соленоидом Смейла-Вильямса. Опишите топологию пересечения соленоида с диском.*

Задача 6. *Разобьём полноторие на половины* $P_0 : \{(\varphi, z) : \varphi \in [0, \frac{1}{2}]\}$, $P_1 : \{(\varphi, z) : \varphi \in [\frac{1}{2}], 1\}$. *Точке* x *сопоставим её судьбу - последовательность нулей и единиц. На n-том месте ноль, если* $f^n(x) \in P_0$, *а иначе 1.*

Всякой ли судьбе соответствует точка полнотория? Можно ли найти координаты (φ, z) *точки по её судьбе?*

Задача 7. *Докажите, что соленоид - объединение гладких кривых. Куда попадает точка* z *с диска, делая оборот по этой кривой?*

Является ли соленоид линейно связным множеством?

Предложение. *Вместо этой задачи можно решить другую. Рассмотрим косое произведение* F *над линейным растяжением окружности, то есть отображение на* $S^1 \times M$ *вида:*

$$F(\varphi, x) = (2n\varphi, f_\varphi(x)),$$

где f_φ *- какой-то диффеоморфизм, зависящий от угла* φ.

Пусть отображения f_φ *постоянны на каждой дуге* $\left(\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right)$; *обозначим их, соответственно,* $f_1 \dots f_n$. *Эти послойные отображения удовлетворяют условиям леммы Хатчинсона (см. задачу 3), и, кроме того, для всякого послойного отображения* $f_\varphi(W) \subset W$.

Рассмотрим точку $u = (\varphi, w)$, *где* $w \in W$. *Докажите, что для типичного* φ [5] *её орбита плотна в* $S^1 \times D$.

[5] Свойство типично, если выполнено на остаточном множестве. Остаточное множество - пересечение открытых всюду плотных.