Дополнительные задачи.

Этот листочек содержит дополнительные задачи для тех, кому они покажутся интересными. Они все непростые, и все являются бонусными, то есть их можно зачесть в любой листок по выбору; однако правила о том, что для допуска надо решить по одной задаче из каждого листка (кроме этого), эти задачи не отменяют.

Задача 1 (геометрическая структура дифференциального уравнения)**.** *Пусть* $F(t, x, y) = 0$ *- многообразие, которое задаёт дифференциальное уравнение в силу* $y = \dot{x}$*. Опишите, интегральные кривые какого поля направлений задают решения этой системы (это поле должно быть построено как пересечение двух полей плоскостей).*

Рассмотрите особые точки проекции $(t, x, y) \to (t, x)$*. Приведите пример, когда решение целиком лежит в особых точках проекции. Такое решение называется* особым[1].

Геометрически опишите те точки F*, где может нарушаться теорема существования и единственности.*

Пусть теперь $G(u, x, t, u_x, u_t, u_{xx}) = 0$ *- уравнение в частных производных. Интегральным многообразием какого поля плоскостей должно быть решение?*

Задача 2 (интегрируемость уравнений и разрешимость алгебры симметрий)**.** *Пусть* A *- преобразование пространства из предыдущей задачи, сохраняющее поле направлений. Такое преобразование называется* симметрией *дифференциального уравнения.*

Докажите, что симметрии образуют группу Ли. Пусть соответствующая группе Ли алгебра Ли (алгебра инфенитиземальных симметрий) *- подгруппа верхнетреугольных матриц. Докажите, что тогда уравнение интегрируется в квадратурах, то есть эквивалентно системе с разделяющимися переменными:*

а) для F*,*

б) для G*.*

Задача 3 (эргодичность и линейные диффеоморфизмы Аносова)**.** *Мера* μ *инвариантна отностительно отображения* f*, ежели* $\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$

[1]Существуют разные неэквивалентные определения особого решения. Мы будем придерживаться такого, хотя в Википедии написано не так.

для всякого измеримого множества A (в дальнейшем рассматриваются только вероятностные борелевские меры). Она эргодична, если любое инвариантное множество ($f^{-1}A = A$) имеет меру 0 или 1.

Докажите, что мера Лебега эргодична для линейных диффеоморфизмов Аносова.

Задача 4 (эргодическая теорема и цепные дроби)**.** *Эргодическая теорема Биркгофа говорит, что для почти всех точек $x \in X$, для измеримого $\varphi : X \to \mathbb{R}$ для эргодической меры μ*

$$\lim \frac{\varphi(x) + \varphi(f(x)) + \ldots \varphi(f^{n-1}(x))}{n} = \int_X \varphi d\mu.$$

Докажите, что мера $\frac{\log_2 e}{1+x}dx$ эргодична для отображения Гаусса

$$x \to \{\frac{1}{x}\}.$$

Выведите из этого, что для почти любого числа x в его разложении в цепную дробь число k встречается с вероятностью, не зависящей от x. Какой?

Задача 5 (устойчивость метода Эйлера)**.** *Метод Эйлера построения решения задачи Коши вида $\dot{x} = f(x,t)$ очень прост. Начнём с x_0, задавшимсь произвольным h. Будем считать, что $x(0) = x_0$, а*

$$x((n+1)h) = x(nh) + hf(x(nh), nh).$$

После этого $x(nh)$ и $x((n+1)h)$ соединяются отрезком, так что итогом процедуры будет ломаная.

Решите систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

и нарисуйте фазовый портрет.

Решите систему методом Эйлера с шагом $h = 2$ для $x = 5, y = 8$, посчитав её на первые 6 шагов.

То же для $h = 1$ и $h = 0,5$. Ваши выводы?

Для произвольного многомерного линейного уравнения $\dot{x} = Ax$ со стоком каким должен быть h, чтобы получившиеся ломаные всё ещё стремились к постоянному решению?

Задача 6 (теорема Гробмана-Хартмана). *Докажите, что диффеоморфизм (можете считать его сколь угодно гладким) вблизи гиперболической неподвижной точки топологически эквивалентен своей линейной части.*

Замечние. *Теоремой Адамара-Перрона можно пользоваться без доказательства.*

Задача 7 (часть теоремы Ньюхауса о дикой динамике). *Пусть U - область в пространстве C^2-гладких диффеоморфизмов замкнутой поверхности. Предположим, что у всех диффеоморфизмов в этой области есть седло $s(f)$, такое, что зависимость седловой точки от отображения непрерывна, и $s(f)$ диссипативно (произведение собственных значений дифференциала в s меньше 1).*

У точки s есть устойчивое и неустойчивое одномерные многообразия. Пусть U устроено так, что на плотном подмножестве в U они касаются, причём квадратично.

Докажите, что тогда типичный диффеоморфизм в U обладает бесконечным числом непересекающихся поглощающих областей.

Указание. *Вам надо, по сути, показать, что малым размыканием квадратичного касания можно дать возникнуть поглощающей области для какой-то степени f^n.*

Примечание. *Как показал Ньюхаус, внутри каждой такой области находится просто один сток, а U можно построить. Таким образом, возможна динамика с бесконечным числом стоков на поверхностях - это так называемое* явление Ньюхауса.