

Семинар 2. Поворот и северюжное отображение

Задача 1. *Может ли нетождественная композиция двух северюжных отображений быть поворотом?*

Задача 2. *Сколько всего есть отображений 3 точек на себя? Сколько классов сопряжённости изоморфизмами?*

А если точек 5?

Задача 3. *Рассмотрим множество сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов прямой с конечным числом неподвижных точек. Докажите, что отношение топологической эквивалентности делит это множество на счётное число классов.*

Задача 4. *При каких условиях на a и b поворот на угол a сопряжён повороту на угол b , если а) a рационально, б) b иррационально?*

Задача 5. *А если в задаче 3 мы заменим гомеоморфизмы прямой на гомеоморфизмы плоскости, будет ли число классов сопряжённости по-прежнему счётным?*

Задача 6. *Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — сохраняющий ориентацию бесконечно-гладкий диффеоморфизм прямой с одной гиперболической неподвижной точкой. Доказать, что f гладко эквивалентен линейному отображению.*

Указание. *Можно использовать без доказательства тот факт, что n -тая производная $f^{(k)}$ есть $O(\lambda^k)$ при любом k ; где $\lambda < 1$ — производная в неподвижной точке.*

Задача 7 (Мозаики Пенроуза, ч.1. Скелет). *Мозаики Пенроуза — изящный пример непериодических замощений плоскости. Для их построения можно воспользоваться двумя ромбами с отмеченными сторонами (см. рис. 1). Углы первого ромба — $2\pi/5$ и $3\pi/5$, а углы второго — $\pi/5$ и $4\pi/5$.*

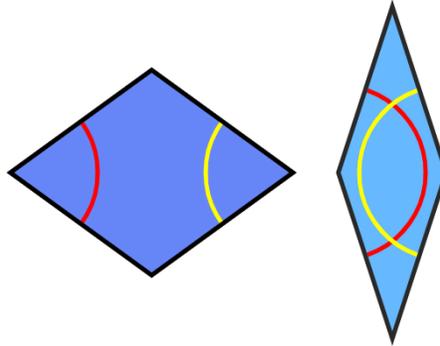


Рис. 1. Плитки мозаики Пенроуза

Когда ромбы замощают \mathbb{R}^2 , надо соединять стороны так, чтобы красные арки состыковывались с красными, а жёлтые - с жёлтыми (в цветах рис. 1). Два смежных ромба должны иметь общее ребро. В итоге можно получить много разных красивых неперiodических покрытий плоскости, см. рис. 2.

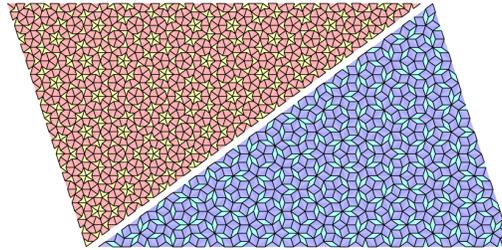


Рис. 2. Замощения Пенроуза: правая часть - замощение ромбами, левая - составленные из ромбов «kits and darts»

Выберем произвольное ребро. Легко видеть, что замощение содержит полосу (бесконечную в обе стороны) попарно стыкующихся ромбов, каждый из которых имеет два ребра, параллельных исходному (и равных ему). Соединим (простыми кривыми) середины рёбер этих вершин в полосе.

Сопоставим каждой полосе вектор (начальное ребро) и кривую, пара «вектор-кривая» будет называться в-к пара. Построим все в-к пары для всех полос / стартовых рёбер. Объединение всех в-к пар замощения называется скелетом замощения.

Докажите, что можно восстановить (с точностью до параллельного переноса на плоскости) исходное замощение, зная лишь его скелет.