

# Задачи

6 сентября 2024 г.

## 1 Семинар 2. Поворот и северюжное отображение

**Задача 1.** *Может ли нетождественная композиция двух северюжных отображений быть поворотом?*

**Задача 2.** *Сколько всего есть отображений 3 точек на себя? Сколько классов сопряжённости изоморфизмами?*

*А если точек 5?*

**Задача 3.** *Рассмотрим множество сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов прямой с конечным числом неподвижных точек. Докажите, что отношение топологической эквивалентности делит это множество на счётное число классов.*

**Задача 4.** *При каких условиях на  $a$  и  $b$  поворот на угол  $a$  сопряжён повороту на угол  $b$ , если а)  $a$  рационально, б)  $b$  иррационально?*

**Задача 5.** *А если в задаче 3 мы заменим гомеоморфизмы прямой на гомеоморфизмы плоскости, будет ли число классов сопряжённости по-прежнему счётным?*

**Задача 6.** *Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм прямой с одной (гиперболической) неподвижной точкой. Доказать, что  $f$  гладко эквивалентен линейному отображению.*

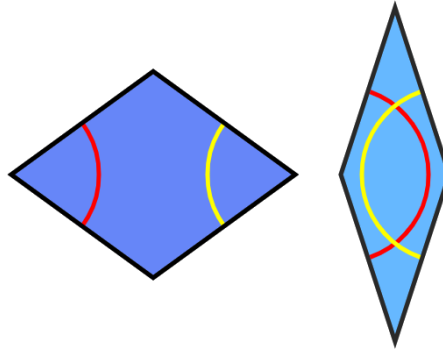


Рис. 1: Плитки мозаики Пенроуза

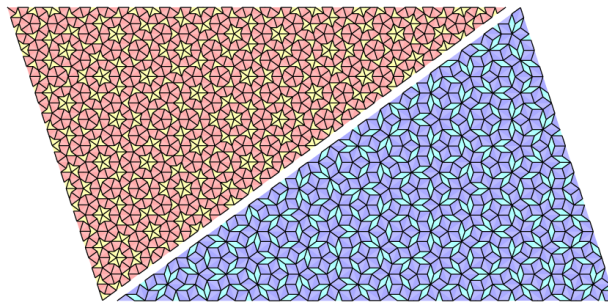


Рис. 2: Замощения Пенроуза: правая часть - замощение ромбами, левая - составленные из ромбов «kits and darts».

**Задача 7** (Мозаики Пенроуза, ч.1. Скелет). *Мозаики Пенроуза - изящный пример неперидических замощений плоскости. Для их построения можно воспользоваться двумя ромбами с отмеченными сторонами (см. рис. 1). Углы первого ромба -  $2\pi/5$  и  $3\pi/5$ , а углы второго -  $\pi/5$  и  $4\pi/5$ .*

*Когда ромбы замощают  $\mathbb{R}^2$ , надо соединять стороны так, чтобы красные арки состыковывались с красными, а жёлтые - с жёлтыми (в цветах рис. 1). Два смежных ромба должны иметь общее ребро. В итоге можно получить много разных красивых неперидических покрытий плоскости, см. рис. 2.*

*Выберем произвольное ребро. Легко видеть, что замощение содер-*

*жит полосу (бесконечную в обе стороны) попарно стыкующихся ромбов, каждый из которых имеет два ребра, параллельных исходному (и равных ему). Соединим (простыми кривыми) середины рёбер этих вершин в полосе.*

*Сопоставим каждой полосе вектор (начальное ребро) и кривую, пара «вектор-кривая» будет называться в-к пара. Построим все в-к пары для всех полос / стартовых рёбер. Объединение всех в-к пар замощения называется скелетом замощения.*

*Докажите, что можно восстановить (с точностью до параллельного переноса на плоскости) исходное замощение, зная лишь его скелет.*