Семинар 3. Теоремы существования и единственности

Задача 1. *Согласно модели академика С.П. Капицы (и Х. фон Фёрстера), динамика численности населения Земли устроена так: прирост населения в среднем пропорционален квадрату числа уже живущих людей.*

В предположении, что в 5500 году до н.э. на Земле жило два человека, а в 3250 до н.э. - восемь человек, найдите, когда в этой модели число людей на Земле стало бы бесконечным?

Тем, что число людей должно быть целым, пренебречь.

Задача 2. *Может ли ненулевой формальный степенной ряд $f = \sum a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{F}_p$ быть (формальным) решением уравнения $f' = f$, если $\mathbb{F}_p$ - конечное поле?*

Задача 3. *Тело двигалось по закону $\dot{v} = -v^{2/3}$ по прямой в одну сторону. Когда через $t = 8$ его проверили, оказалось, что оно уже покоится. Какова максимальная начальная скорость тела?*

Задача 4. *Пусть $\dot{x} = f(x)$ - уравнение на функцию $x(t)$, определённую на окружности $\mathbb{S}^1$. Считая f гладкой, а) скажите, откуда и куда действует f; б) приведите пример f, т.ч. это уравнение не решается, в) сформулируйте условие на функцию f, необходимое и достаточное для того, чтобы это уравнение решалось.*

Задача 5 (Провал попытки усилить критерий Нагумо)**.** *Пусть для непрерывной функции f, для какого-то t_0, для фиксированного $k > 1$ и любого $t > t_0$*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \frac{k\|x-y\|}{t-t_0}.$$

Придумайте такое f, что уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ может иметь более одного решения. При придумывании можно считать $t_0 = 0$.

А вот при $k = 1$ задача Коши имеет единственное решение, это критерий единственности Нагумо.

Задача 6 (Мозаики Пенроуза: сетка)**.** *Обозначим $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Пусть $\gamma_0, \dots \gamma_4$ - вещественные числа с нулевой суммой: $\gamma_0 + \dots + \gamma_4 = 0$. Опре-*

делим j-решётку (мы всегда предполагаем, что $j = 0 \dots 4$) как множество:

$$G_j = \{z \in \mathbb{C} | Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Пятирешётка - *объединение G_j. Если ни одна точка $\mathbb{C}$ не принадлежит более чем двум решёткам (из пяти), то пятирешётка назывется* регулярной, *а иначе* - сингулярной. *Всякую «дыру в пятирешётке», т.е., связанную компоненту $\mathbb{C} \setminus \cup G_j$, мы назовём* ячейкой.

Начнём с регулярной пятирешётки. Каждой точке пересечения решёток сопоставим ромб. Тогда можно получить замощение Пенроуза плоскости (см. предыдущий листочек для определения), задав вершины ромбов так:

$$f(z) = \sum K_j(z)\zeta^j,$$

где $K_j(z) = \lceil Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j \rceil$ - округление вверх (до ближайшего целого не меньше аргумента) для образующего решётку выражения $Re(z\zeta^{-j}) + \gamma_j$.

Докажите это, т.е., проверьте, что такая формула для задания вершин действительно задаёт замощение Пенроуза (можете упростить задачу и не проверять правило «красных и жёлтых дуг» из предыдущего листочка).

Задача 7. *Правоинвариантным векторным полем группы Ли G называется векторное поле на группе Ли, инвариантное относительно правого сдвига (т.е., отображения $x \to xg$). Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to G$ - функция на группе, являющаяся решением задачи Коши:*

$$\frac{d\varphi}{dt}(\tau) = \zeta(\varphi(\tau))$$

с начальным условием $\varphi(0) = e$, где e - единица группы Ли, а ζ - правоинвариантное поле.

Докажите, что решение определено на всей числовой прямой. Проверьте, что $\varphi(s) + \varphi(t) = \varphi(t + s)$. Это свойство называется свойством потока, *а отображение φ* - однопараметрической (под)группой *группы G.*