Семинар 4. Потоки

Задача 1. *За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу радиуса 1 м., вытечет из неё через круглое отверстие радиуса 0,1 м., вырезанное в дне чаши (при н.у.)? Все константы можно округлить до целых.*

Задача 2. *Приведите гладкий пример или докажите, что не существует: а) поток на $\mathbb{S}^3$ с конечным числом особых точек и предельных циклов, некоторые орбиты которого имеют ω-предельное множество, не являющееся предельным циклом или особой точкой, б) поток на $\mathbb{S}^2$ со счётным числом периодических орбит, в) поток на $\mathbb{S}^2$, у которого ω-предельное множество какой-то точки - вся сфера.*

Задача 3. *Найдите такой угол наклона φ на торе $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, что траектории линейного потока на торе под углом φ образуют трилистник.*

Задача 4 (Bowen Eye)**.** *Руфус Боуэн рассмотрел векторное поле, изображённое на рисунке ниже: сепаратрисы двух сёдел образуют связки таким образом, что возможно кругообразное движение во внутренней области. Сёдла гиперболичны.*

При каком условии на собственые значения сёдел траектории изнутри области будут приближаться к границе? Ответ можно обосновать на «интуитивном» уровне.

Докажите, что ω-предельное множество любой траектории (кроме особой точки - фокуса) в этом случае - вся граница, но при этом доля интервалов времени, которое траектории проводят вне ε-окрестности сёдел, стремится к нулю.

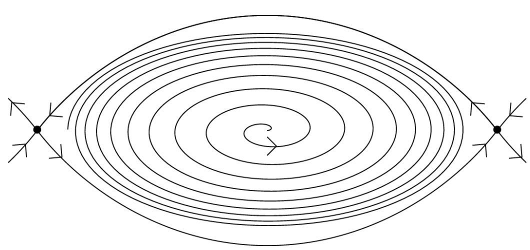

Рис 1. Пример Боуэна.

Задача 5. *Приведите пример полиномиального векторного поля на плоскости (в стандартных координатах), у которого все особые точки гиперболичны, но при этом поле не является структурно устойчивым. Ответ обоснуйте.*

Задача 6. *Пусть v - вещественно-аналитическое векторное поле в окрестности начала координат на $\mathbb{R}$, $v(0) = 0$, $v'(0) \neq 0$. Докажите, что локальный поток поля v в окрестности 0 локально аналитически сопряжён с линейным потоком (а именно, с $\varphi^t x = e^{v'(0)t}x$).*

Задача 7 (Замощения Пенроуза и тор)**.** *В задаче 3.6. было введено понятие пятирешётки, определяемой по пяти числам γ_j с нулевой суммой. Докажите, что изменение γ_j на целое число не меняет пятирешётку.*

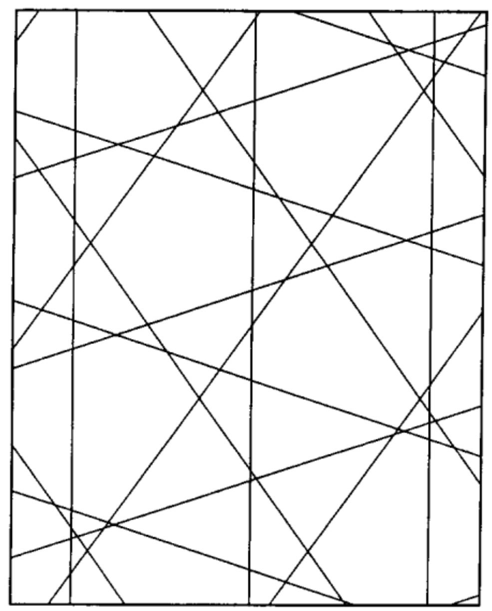

Рис 2. Регулярная пятирешётка.

Следовательно, набор γ_j можно рассматривать как точку на подмножестве пятимерного тора - на четырёхмерном торе, заданном условием $\sum \gamma_j = 0$. Будем считать, что набор γ_i образует вектор u.

Посмотрим на матрицу

$$W^T = \begin{pmatrix} Re(\zeta) & Re(\zeta^2) & Re(\zeta^3) & Re(\zeta^4) & Re(\zeta^5) \\ Im(\zeta) & Im(\zeta^2) & Im(\zeta^3) & Im(\zeta^4) & Im(\zeta^5) \end{pmatrix}.$$

Перепишите функцию f из задачи 3.6 в виде функции от точки плоскости (x, y), вектора u и матрицы W при заданной решётке.

Замечание. *Предполагается, что следующая задача на тему мозаик Пенроуза будет последней и установит их связь с потоками на* *вышеопределённом четырёхмерном торе. Для этого нам остался один последний шаг.*

Альтернативное предложение. *Вместо этой задачи и следующей задачи на мозаику Пенроуза можно доказать теорему Шарковского о порядке возникновения периодических точек для отображения отрезка (задача 5 из первого листка была вводной в неё).*

Формулировка теоремы такова. Пусть для любой непрерывной динамической системы на отрезке из существования периодической орбиты периода a следует существование орбиты периода b; обозначим это как $a \triangleright b$. Тогда на натуральных числах есть отношение порядка

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2n+1 \triangleright \dots$$

$$\dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2(2n+1) \triangleright \dots$$
$$\dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k * 5 \triangleright 2^k \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^k(2n+1) \triangleright \dots$$
$$\dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{(n-1)} \triangleright 2^{(n-2)} \triangleright \dots \triangleright 2 \triangleright 1.$$