

## Семинар 5. Подковы

**Задача 1.** Вычислите координаты точки по её судьбе для стандартной подковы Смейла.

**Задача 2.** Сколько точек периода 123 имеет стандартная подкова Смейла?

**Задача 3.** Опишите гомоклинические точки подковы, то есть такие, у которых  $\omega$ -предельное, и  $\alpha$ -предельное множество - неподвижные точки.

А если «неподвижные» заменить на «периодические»?

**Задача 4.** В  $\mathbb{R}^3$  выбран диск  $D$  - единичный диск в плоскости  $Oxy$ . Приведите пример векторного поля (можно описывать качественно) в трёхмерном пространстве  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  такого, что отображение Пуанкаре на единичный диск (отображение первого возвращения с  $D$  на себя) - это отображение подковы Смейла.

**Задача 5** (Отображение Эно). Семейство отображений:

$$F_{a,b}(x, y) = (y, a - bx - y^2)$$

называется семейством отображений Эно. Докажите, что при  $b \neq 0$  эти отображения обратимы. Найдите подкову Смейла у  $F_{9/2, 1/5}$ .

**Задача 6.** Целый ряд физических проблем, в т.ч., в физике частиц, приводит к так называемой «динамике подскакивающего мяча» на колеблющемся столе. Она описывается двумерной динамической системой:

$$F(\varphi, \nu) = (\varphi + \nu, \alpha\nu - \gamma \cos(\varphi + \nu)).$$

В случае мяча  $\gamma$  играет роль вынуждающей силы,  $\alpha$  - трения,  $\nu$  - скорости, а  $\varphi$  - время соударения.

Будем считать, что все  $\varphi$  определены с точностью до  $2\pi$  (т.е., наша динамическая система действует на цилиндре  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ).

Возьмём параллелограм, высеченный прямыми:  $\varphi + \nu = 0$ ,  $\varphi + \nu = 2\pi$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi$ . Докажите, что при  $\alpha$  близких к 1 и при  $\gamma \geq 5\pi$  (или хотя бы при достаточно больших  $\gamma$ ) отображение действует на параллелограмме как подкова Смейла.

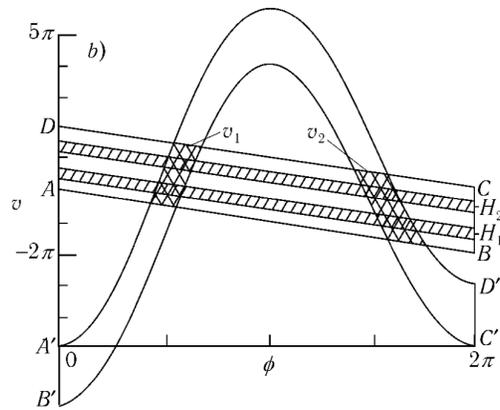


Рис 1. *Отображение подскакивающего мяча,  $\gamma = 5\pi, \alpha = 1$ .*

**Задача 7.** *Докажите, что множество всех диффеоморфизмов открыто в пространстве гладких функций замкнутого многообразия.*