Семинар 6. Поворот и потоки на торе

Задача 1. *Какова асимптотика распределения первых цифр 3^N? 4^N?*

Задача 2. *Может ли орбита быть и не периодической, и не всюду плотной для линейного потока на $\mathbb{T}^2$? А для $\mathbb{T}^3$?*

Задача 3. *Придумайте угол поворота α такой, что орбита нуля (а значит, и все остальные) очень неравномерна: для каждого n найдутся два интервала A_n и B_n длины 10^{-2^n} такие, что $\{0, \alpha \dots k\alpha\}$ (k - какое-то выбранное нами очень большое число) попадает в A_n уже миллион раз, а в B_n этих точек нет вообще.*

Указание. *В десятичной записи угла α можно обойтись цифрами 0 и 1. Природа этого явления глубоко связана с тем, является ли число диофантовым или лиувиллевым.*

Задача 4. *Могут ли быть периодические точки разных минимальных периодов у (а) сохраняющего, (б) не сохраняющего ориентанцию отобржения $\mathbb{S}^1$? А $\mathbb{S}^2$?*

Задача 5. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Докажите, что из него извлекается «динамический корень» - сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что $g(g(x)) = f(x)$.*

Верно ли это для гомеоморфизмов окружности?

Задача 6. *Пусть $H(x, y)$ - известная гладкая функция. Задана система дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y); \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

Заметьте, что это система обыкновенных дифференциальных уравнений, а не уравнений в частных производных, потому что мы ищем $(x(t), y(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Пусть H - полином от двух переменных. Докажите, что все ограниченные решения либо имеют ω-пределом особую точку (может ли её линейная часть быть узлом или фокусом?), либо периодичны.

Указание. *Докажите, что на каждом решении значение H постоянно. Функции, постоянные на решениях (если они не константы), называются* первыми интегралами.

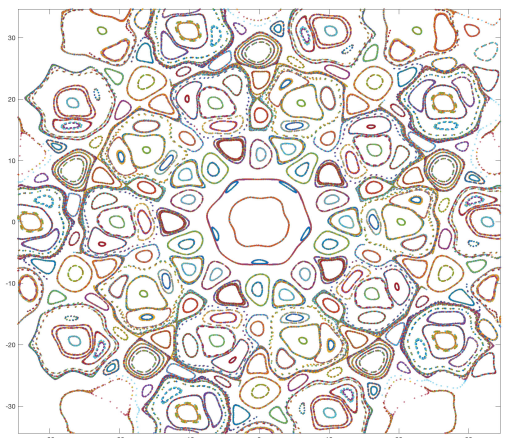

Рис 1. Траектории гамильтоновой системы.

Тот факт, что у системы много траекторий, динамика на которых после замены координат выглядит как линейный поток на $\mathbb{T}^n$ (в данном случае $n = 1$) - проявление того, что система гамильтонова. *Это понятие мы ещё обсудим на лекциях.*

Задача 7 (Параллельный перенос мозаики Пенроуза эквивалентен линейному сдвигу на порождающем торе)**.** *Используя формулу, полученную в задаче 4.7., докажите, что параллельный перенос мозаики Пенроуза соответствует линейному сдвигу на торе, образованному γ_i с условием $\sum \gamma_i = 0$ (это четырёхмерный тор, являющийся подпространством пятимерного тора).*

Какое подпространство в γ_i заметают все возможные параллельные переносы мозаики Пенроуза?

Указание. *Вместо этой задачи и задачи 4.7. можно решить задачу про порядок Шарковского, которая сформулирована в четвёртом листочке. Если вы не хотите искать формулу в задаче 4.7., я могу сказать правильный ответ к 4.7., которым можно пользоваться без доказательств.*