

## Семинар 7. Число вращения и другие истории

**Задача 1.** Поскольку  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , то можно поднять ориентируемый диффеоморфизм  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  до диффеоморфизма  $F$  на прямой.

Определим «средний снос точки  $x$ » по формуле:

$$\rho_x(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{\circ n}(x) - x}{n}.$$

Докажите, что в правой части - число от 0 до 1.

**Задача 2.** Докажите, что определённое в предыдущей задаче  $\rho_x(f)$  не зависит от выбора конкретного поднятия  $F$  или от выбора точки  $x$ . Число  $\rho(f)$  называют числом вращения отображения  $f$ .

Докажите, что  $\rho(f^q) = \{q\rho(f)\}$ .

**Задача 3.** Докажите, что а) диффеоморфизм с нулевым числом вращения имеет неподвижную точку, б) диффеоморфизм с рациональным числом вращения имеет периодическую орбиту.

**Задача 4.** Докажите, что если у диффеоморфизма окружности все периодические орбиты гиперболичны, то их конечное число. Докажите, что если у диффеоморфизма окружности все периодические орбиты гиперболичны (и они вообще есть), то он структурно устойчив.

**Примечание.** Если у диффеоморфизма есть негиперболическая периодическая орбита, то он заведомо структурно неустойчив. Если же у него вообще нет периодических орбит, то в условиях  $C^2$ -гладкости он сопряжён повороту на  $\rho(f)$  (это утверждение составляет теорему Данжуа). Поэтому задача 4 описывает все возможные структурно устойчивые  $C^2$ -гладкие диффеоморфизмы окружности.

**Задача 5.** Докажите, что  $\rho$  - непрерывная функция с точностью до разрывов около 0 и 1.

Покажите, не вдаваясь в подробности, что  $\rho(f + a)$  - не гладкая функция от  $a$  для северюжного отображения  $f$ .

**Примечание.** Однако эта функция гёльдерова.

**Задача 6.** Пусть  $M$  - риманово многообразие с метрикой  $g(x)$ , а  $(p, x)$  - координаты в кокасательном расслоении.

Докажите, что поток гамильтонова векторного поля на кокасательном расслоении  $T^*M$  с гамильтонианом

$$H(p, x) = \frac{1}{2} g^{i,j}(x) p_i p_j$$

задаёт (локальные) геодезические при проекции на  $M$ .

**Бонус.** Решив эту задачу, можете добавить дополнительно +1 к числу решённых задач в любом листочке по выбору.

**Задача 7** (уравнение Бюргерса в форме Эйлера-Арнольда). Бесконечно-гладкие диффеоморфизмы окружности можно рассматривать<sup>1</sup> как многообразие  $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ . В каждой точке касательное пространство  $T\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$  - это пространство векторных полей на окружности; их можно записать в виде  $f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ .

Введём на этом многообразии метрику; для пары полей  $h(x) \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $k(x) \frac{\partial}{\partial x}$  в диффеоморфизме  $f$  она равна:

$$G_f(h, k) = \int_{\mathbb{S}^1} h(x) k(x) f'(x) dx.$$

Выпишите уравнение геодезической  $\gamma$  для этой метрики.

Обозначим  $u = \gamma_t \circ \gamma^{-1}$  (или, более формально,  $u(x, t) = \gamma_t(y, t)$ , где  $y = \gamma(\cdot, t)^{-1}(x)$ ). Убедитесь, что эта замена превращает уравнение геодезической в уравнение бегущей волны: гидродинамическое уравнение Бюргерса:

$$u_t = \text{Const} * u_x u.$$

**Указание.** Проверьте, что  $u_x = \frac{\gamma_{tx}}{\gamma_x} \circ \gamma^{-1}$ ,  $\frac{\partial \gamma(\cdot, t)^{-1}(x)}{\partial t} = -\frac{\gamma_t}{\gamma_x} \circ \gamma^{-1}$ . Вариационный метод можно строго не обосновывать.

**Бонус.** Решив эту задачу, можете добавить дополнительно +1 к числу решённых задач в любом листочке по выбору.

---

<sup>1</sup>Правда, оно бесконечномерное; если смотреть только на диффеоморфизмы, образованные тригонометрическими полиномами фиксированной степени, то будет настоящее многообразие. Но мы просто притворимся, что всё хорошо.