Семинар 7. Число вращения и другие истории

Задача 1. *Поскольку $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то можно поднять ориентируемый диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ до диффеоморфизма F на прямой.*

Определим «средний снос точки x» по формуле:

$$\rho_x(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{\circ n}(x) - x}{n} \mod 1.$$

Докажите, что в правой части - число от 0 до 1.

Задача 2. *Докажите, что определённое в предыдущей задаче $\rho_x(f)$ не зависит от выбора конкретного поднятия F или от выбора точки x. Число $\rho(f)$ называют* число вращения *отображения f.*

Докажите, что $\rho(f^q) = \{q\rho(f)\}$.

Задача 3. *Докажите, что а) диффеоморфизм с нулевым числом вращения имеет неподвижную точку, б) диффеоморфизм с рациональным числом вращения имеет периодическую орбиту.*

Задача 4. *Докажите, что если у диффеоморфизма окружности все периодические орбиты гиперболичны, то их конечное число. Докажите, что если у диффеоморфизма окружности все периодические орбиты гиперболичны (и они вообще есть), то он структурно устойчив.*

Примечание. *Если у диффеоморфизма есть негиперболическая периодическая орбита, то он заведомо структурно неустойчив. Если же у него вообще нет периодических орбит, то в условиях C^2-гладкости он сопряжён повороту на $\rho(f)$ (это утверждение составляет теорему Данжуа). Поэтому задача 4 описывает все возможные стрктурно устойчивые C^2-гладкие диффеоморфизмы окружности.*

Задача 5. *Докажите, что ρ - непрерывная функция с точностью до разрывов около 0 и 1.*

Покажите, не вдаваясь в подробности, что $\rho(f + a)$ - не гладкая функция от a для североюжного отображения f.

Примечание. *Однако эта функция гёльдерова.*

Задача 6. *Пусть M - риманово многообразие с метрикой $g(x)$, а (p, x) - координаты в кокасательном расслоении.*

Докажите, что поток гамильтонова векторного поля на кокасательном расслоении T^*M с гамильтонианом

$$H(p,x) = \frac{1}{2} g^{i,j}(x) p_i p_j$$

задаёт (локальные) геодезические при проекции на M.

Бонус. *Решив эту задачу, можете добавить дополнительно +1 к числу решённых задач в любом листочке по выбору.*

Задача 7 (уравнение Бюргерса в форме Эйлера-Арнольда)**.** *Бесконечно-гладкие диффеоморфизмы оружности можно рассматривать*[1] *как многообразие $Diff(\mathbb{S}^1)$. В каждой точке касательное пространство $TDiff(\mathbb{S}^1)$ - это простртнство векторных полей на окружности; их можно записать в виде $f(x)\frac{\partial}{\partial x}$.*

Введём на этом многообразии метрику; для пары полей $h(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $k(x)\frac{\partial}{\partial x}$ в диффеоморфизме f она равна:

$$G_f(h,k) = \int_{\mathbb{S}^1} h(x)k(x)f'(x)dx.$$

Выпишите уравнение геодезической γ для этой метрики.

Обозначим $u = \gamma_t \circ \gamma^{-1}$ (или, более формально, $u(x,t) = \gamma_t(y,t)$, где $y = \gamma(\cdot,t)^{-1}(x)$). Убедитесь, что эта замена превращает уравнение геодезической в уравнение бегущей волны: гидродинамическое уравнение Бюргерса:

$$u_t = Const * u_x u.$$

Указание. *Проверьте, что $u_x = \frac{\gamma_{tx}}{\gamma_x} \circ \gamma^{-1}$, $\frac{\partial \gamma(\cdot,t)^{-1}(x)}{\partial t} = -\frac{\gamma_t}{\gamma_x} \circ \gamma^{-1}$. Вариационный метод можно строго не обосновывать.*

Бонус. *Решив эту задачу, можете добавить дополнительно +1 к числу решённых задач в любом листочке по выбору.*

[1] Правда, оно бесконечномерное; если смотреть только на диффеоморфизмы, образованные тригонометрическими полиномами фиксированной степени, то будет настоящее многообразие. Но мы просто притворимся, что всё хорошо.