

Семинар 8. Линейные диффеоморфизмы Аносова и рекуррентные соотношения

Задача 1. Последовательность устроена так:

$$v_{n+2} = v_{n+1} - v_n + v_{n-1}$$

Первые члены последовательности - C_1, C_2, C_3 . Выпишите формулу для n -того члена последовательности.

Задача 2. Запишите обыкновенное дифференциальное уравнение на торе \mathbb{T}^3 , такое, что отображение Пуанкаре на сечении $(x, y, 0)$ порождает диффеоморфизм Аносова (2-1-1-1).

Задача 3. Докажите, что направления устойчивых и неустойчивых слоений линейного диффеоморфизма Аносова двумерного тора - иррациональны, и выведите из этого, что они всюду плотны. Все ли квадратичные иррациональности (т.е., корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c целые) могут быть собственными значениями такого диффеоморфизма Аносова?

Задача 4. Может ли линейный диффеоморфизм Аносова быть гомотопен тождественному отображению, то есть соединяться с тождественным отображением тора \mathbb{T}^2 кривой, лежащей в пространстве диффеоморфизмов двумерного тора?

Задача 5. Рассмотрим последовательность $\{P(n)\}$, где P - произвольный тригонометрический полином. Может ли она быть задана (конечным) рекуррентным соотношением?

Задача 6. Петя и Вася играют в такую игру: вначале Петя пишет на доске вещественное число (это такая доска, что на ней любое число из \mathbb{R} можно записать), потом Вася пишет второе. Дальше они заменяют первое число на сумму удвоенного первого со вторым, а второе - на сумму первого со вторым. И продолжают такие замены, пока не получится число, у которого после запятой стоит хотя бы сто нулей.

Если за первые N шагов такое число получилось, то выиграл Вася, а иначе - Петя. При каких N кто выигрывает? (при правильных рассуждениях можно не досчитывать; или используйте калькулятор при необходимости)

Задача 7. В маятнике с вязким трением и внешней периодической силой при каких γ, δ возникают периодические орбиты периода m ?

$$\begin{cases} \dot{\theta} = u; \\ \dot{u} = -\sin \theta + \varepsilon(-\delta u + \gamma \cos t). \end{cases}$$

Бонус. Решив эту задачу, можете добавить дополнительно $+1$ к числу решённых задач в любом листочке по выбору.