Семинар 9. Цепные дроби, диффеоморфизмы Аносова, Риккати.

Задача 1. *Рассмотрим на плоскости прямую $y = \alpha x$. Будем строить на координатной плоскости вектора e_j по следующему правилу. e_1, e_2 - координатные вектора (т.е. $(0,1)$ и $(1,0)$). Дальше строим по индукции:*

$$e_{j+1} = a_{j-2}e_j + e_{j-1},$$

где коэффициент a_{j-2} - натуральное число такое, что $a_{j-2}e_j + e_{j-1}$ и e_{j-1} лежат по одну сторону от прямой $y = \alpha x$, а вот $(a_{j-2}+1)e_j + e_{j-1}$ и e_{j-1} уже по разные.

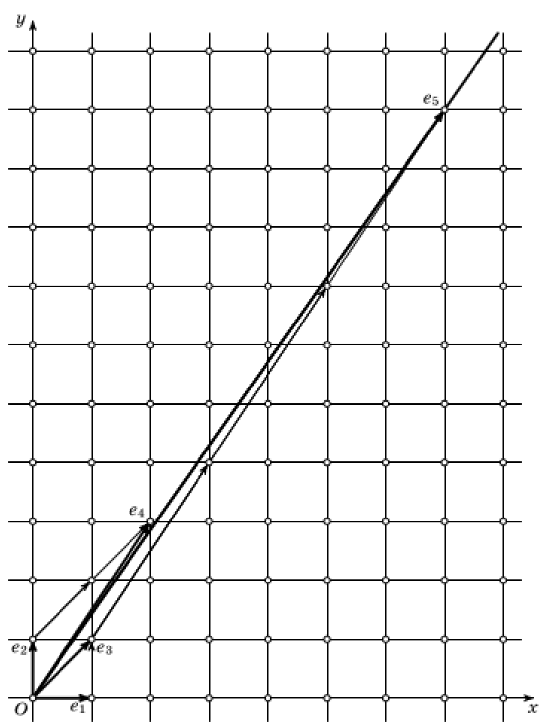

Рис 1. Здесь $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Рассмотрим последовательность дробей вида

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3} + \ldots}},$$

остановленная на a_n-том. Тогда [1] (q_n, p_n) *- координаты* e_j *(при каком* j*?).*

Докажите, что $\det \begin{pmatrix} q_n & p_n \\ q_{n+1} & p_{n+1} \end{pmatrix} = \pm 1$.

Задача 2. *а) Докажите, что последовательность из задачи 1 стремится к числу* α*.*

б) Положим, что у многочлена $x^2 - bx + c = 0$ *вещественные корни* λ_1, λ_2*. Давайте попробуем найти один из корней методом Ньютона (если забыли, что это, см. в интернете), начиная с* $\frac{p_1}{q_1}$ *для одного из них.*

Докажите, что последовательные приближения по методу Ньютона дают последовательность $\frac{p_n}{q_n}$*.*

Примечание. *Такое разложение называется разложением числа* α *в цепную дробь. Цепные дроби - простейший пример явления ренормализации в динамических системах, на котором основано очень много красивых эффектов.*

Задача 3. *Сколько орбит длины 5 у диффеоморфизма Аносова* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*?*

Задача 4. *Пусть дана функция* $z_i(x)$ *(выбор индексов станет ясным позднее). Начнём с*

$$R_i(z_i) = xA_i z_i' + B_i + C_i z_i + xD_i z_i^2,$$

где $A_i.B_i, C_i, D_i$ *- полиномы от* x*. Будем решать* $R_i(z_i) = 0$*, введя новую переменную* z_{i+1} *такую, что* $z_i = \frac{\alpha_i}{1+xz_{i+1}}$*, где* $\alpha_i = -B_i(0)/C_i(0)$*. Докажите, что после этой замены получится уравнение того же вида на* z_{i+1}*, и максимальная степень полиномов* A, B, C, D *не возрастает.*

Делая последовательно ряд таких замен, можно получить решение уравнения в виде цепной дроби (она останавливается, когда $B_i(0) = 0$*).*

Существуют ли такие уравнения, которые дают периодическую цепную дробь а) порядка 1, б) порядка 2?

Примечание. $R_i = 0$ *- пример уравнения Риккати. К такому виду сводятся многие интересные математикам функции, получившие название гипергеометрических. Разложение таких функций в цепные дроби описанного выше вида принадлежит Гауссу.*

[1] Доказывать необязательно, хотя это не слишком сложно.

Задача 5. *Пусть u, v - собственные вектора линейного диффеоморфизма Аносова A двумерного тора с определителем 1 и положительными элементами матрицы. Рассмотрим на плоскости квадрант (пересечение двух полуплоскостей) $au + bv$, где $a, b \geq 0$. Возьмём выпуклую оболочку целочисленных точек, лежащих в этом квадранте (она ограничена двумя ломаными).*

Покажите, что граница этого множества инвариантна, т.е., переходит в себя под действием A.

Покажите, что звенья ломаной (можно рассматривать только далёкие от начала координат) выражаются через вектора e_j для u, v.

Задача 6. *Теорема Лагранжа говорит, что цепная дробь препериодична (т.е., при $k > N$ $a_k = a_{k+p}$) тогда и только тогда, когда α - квадратичная иррациональность.*

Докажите теорему Лагранжа, но часть «иррациональные дают препериодичную дробь» только для α, являющихся тангенсами угла наклона собственных векторов диффеоморфизма Аносова.

Указание. *Используйте предыдущую задачу, если хотите, без доказательства.*

Задача 7. *В маятнике с внешней периодической силой при каких γ, α возникает хаотическое поведение (т.е., при каких параметрах возникает подкова Смейла?):*

$$\begin{cases} \dot{\theta} = u; \\ \dot{u} = -\sin\theta + \varepsilon(\alpha + \gamma\cos t). \end{cases}$$

Предложение *Вместо этой задачи можете решить такую:*

Возьмём два линейных диффеоморфизма Аносова и тангенс угла наклона их собственных векторов. Разложим эти тангенсы в цепные дроби.

Оказалось, что эти цепные дроби разных периодов. Докажите, что эти диффеоморфизмы Аносова не сопряжены топологически.