НМУ, II курс, 12.09.2024

Листок 1.

Задача 1. Случайным образом раскладывают 5 шаров, среди которых 3 красных и 2 белых, по двум коробкам. Величина X – число красных шаров в первой коробке, а Y – число шаров (всех цветов) во второй коробке. Найдите совместное распределение этих величин. Вычислите $\mathbb{E}(X|Y=3)$. Найдите случайные величины $\mathbb{E}(X|Y)$ и $P(X=2|Y)$.

Задача 2. Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ независимы и имеют распределение Пуассона с параметром λ. Пусть $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Найдите: (a) $P(S_n=k|S_m=l)$, (b) $\mathbb{E}(S_n|S_m)$.

Задача 3. Пусть величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ. Найдите: (a) совместную плотность ξ и $\xi+\eta$, (b) условную плотность ξ относительно $\xi+\eta$, (c) $P(\xi\le a|\xi+\eta=x)$, (d) $\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta=x)$ и $\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta)$.

Задача 4. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на $[0,1]$. Пусть $X=\min\{\xi,\eta\}$ и $Y=\max\{\xi,\eta\}$. Найдите плотность совместного распределения X и Y. Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$ и $\mathbb{E}(\sin(XY)|Y)$.

Задача 5. Случайный вектор (ξ,η) имеет нормальное распределение, причем ξ и η распределены с параметрами $\mu=0$ и $\sigma=2$ и $cov(\xi,\eta)=1$. Найдите условную плотность распределения ξ относительно η. Вычислите $\mathbb{E}(\xi|\eta=2)$, $P(1<\xi<2|\eta=1)$. Найдите случайные величины $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ и $P(1<\xi<2|\eta)$.

Задача 6. Пусть ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами μ_1,σ_1 и μ_2,σ_2. Найдите: (a) условное распределение $\xi+\eta$ при условии $\xi=a$, (b) условное распределение ξ при условии $\xi+\eta=b$.

Задача 7. Пусть ξ – случайная величина. Найдите $\mathbb{E}(\sin(2\xi)|\mathrm{tg}\xi)$.

Задача 8. Пусть величины ξ и η независимы и имеют конечное математическое ожидание. Докажите, что

$$\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta)=\mathbb{E}(\eta|\xi+\eta)=\frac{\xi+\eta}{2}$$

Задача 9. Пусть $\{\xi_n\}$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbb{E}|\xi_1|<\infty$. Положим $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Докажите, что

$$\mathbb{E}(\xi_1|S_n,S_{n+1},\ldots)=\frac{S_n}{n}.$$

Задача 10. Пусть распределения векторов (ξ,η) и (ζ,η) совпадают. Докажите, что для всякой ограниченной борелевской функции f выполнено $\mathbb{E}(f(\xi)|\eta)=\mathbb{E}(f(\zeta)|\eta)$ почти наверное.

Задача 11. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — сигма-алгебры в $\mathcal{F}$ и ξ — случайная величина на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с конечным математическим ожиданием. Предположим, что $\sigma(\sigma(\xi),\mathcal{A})$ и $\mathcal{B}$ независимы. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\sigma(\mathcal{A},\mathcal{B}))=\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$ почти наверное.

Задача 12. Предположим, что для всякой случайной величины ξ на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с конечным математическим ожиданием выполнено $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A})=\mathcal{E}(\xi|\mathcal{B})$ почти наверное. Докажите, что верно равенство $\mathcal{A}_P=\mathcal{B}_P$.

Задача 13. Предположим, что у величин $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ и ξ одинаковые распределения. Докажите, что ξ имеет $\mathcal{B}$ — измеримую версию.

Задача 14. Пусть $T\colon L^1(\Omega,\mathcal{F},P)\to L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ — такой линейный ограниченный оператор, что $\|T\|=1$, $T1=1$ и $T(\xi T\eta)=T\xi T\eta$ для всякой ограниченной случайной величины ξ. Докажите, что $T\xi=\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ для некоторой сигма-алгебры $\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$.

Задача 15. Докажите, что для замкнутого линейного подпространства $M\subset L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ следующие условия равносильны: 1) $1\in M$, $\xi,\eta\in M\Rightarrow\max\{\xi,\eta\}\in M$, и 2) для некоторой сигма-алгебры $\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$ выполнено $M=\{\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})\colon\ \xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)\}$.