Листок 2.

Задача 1. Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

(i) Пусть $\mathbb{E}|\xi_0| < \infty$. Проверьте, что $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ является мартингалом тогда и только тогда, когда для каждого $n \geq 1$ величина ξ_n равна константе почти наверно.

(ii) Пусть $\mathbb{E}\xi_0 = 0$. Проверьте, что последовательность $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ является мартингалом относительно $\mathcal{F}_n$.

(iii) Пусть $\mathbb{E}\xi_0 = 1$. Проверьте, что последовательность $\Pi_n = \xi_0 \cdot \xi_1 \cdots \xi_n$ является мартингалом относительно $\mathcal{F}_n$.

(iv) Пусть $e^a = \mathbb{E}e^{\xi_0} < \infty$. Проверьте, что $e^{S_n - na}$, где S_n определено в (ii), является мартингалом относительно $\mathcal{F}_n$.

Задача 2. (Схема Пойа) В урне a красных и b синих шаров. Вытаскиваем шар и кладем в урну два шара одного с ним цвета (то есть возвращаем вынутый и добавляем еще один такого же цвета). Пусть ξ_n — количество красных шаров в урне после n-го повторения эксперимента.

(i) Найдите распределение ξ_n.

(ii) Докажите, что $\eta_n = \xi_n/(n+a+b)$ является мартингалом относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$.

(iii) Докажите, что η_n сходится почти наверное к некоторой величине η. Найдите распределение η.

Задача 3. Пусть $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Для $h > 0$ через $\mathbb{Z}_h^2$ обозначим множество точек $nhe_1 + mhe_2$, где n, m — целые числа. Таким образом, $\mathbb{Z}_h^2$ — целочисленная решетка с шагом h на плоскости. Для всякой функции u на $\mathbb{Z}_h^2$ положим

$$M_h u(x) = \frac{1}{4}\big(u(x+he_1)+u(x-he_1)+u(x+he_2)+u(x-he_2)\big), \quad \Delta_h u(x) = \frac{4}{h^2}\big(M_h u(x) - u(x)\big).$$

Оператор Δ_h называется дискретным оператором Лапласа.

(i) Пусть $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Докажите, что $\Delta_h u(x) = \Delta u(x) + o(1)$ при $h \to 0$.

Функция u на $\mathbb{Z}_h^2$ называется гармонической, если $\Delta_h u = 0$, субгармонической, если $\Delta_h u \geq 0$, и супергармонической, если $\Delta_h u \leq 0$.

(ii) Пусть ξ_n — независимые случайные величины, каждая из которых равновероятно принимает одно из четырёх значений $\pm he_1$, $\pm he_2$. Положим $X_n^y = y + \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $X_0^y = y$. Проверьте, что последовательность $M_n = u(X_n^y)$ относительно $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является мартингалом (субмартингалом, супермартингалом), если u — гармоническая функция (субгармоническая, супергармоническое).

Задача 4. Приведите примеры последовательностей случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$, для которых случайная величина $T = \sup\{n \leq 10\colon \xi_n \geq 1\}$, где $\sup\emptyset = 0$, a) является моментом остановки относительно $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, b) не является моментом остановки относительно $\mathcal{F}_n$.

Задача 5. Пусть τ и σ — моменты остановки относительно фильтрации $\mathcal{F}_n$.

(i) Докажите, что $\tau + \sigma$, $\min\{\tau, \sigma\}$, $\max\{\tau, \sigma\}$ являются моментами остановки.

(ii) Докажите, что $\mathcal{F}_{\min\{\tau,\sigma\}} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

(iii) Докажите, что τ и ξ_τ, где ξ_n согласована с $\mathcal{F}_n$, измеримы относительно $\mathcal{F}_\tau$.

Задача 6. (Тождества Вальда) Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

(i) Пусть $\mu = \mathbb{E}\xi_1$ существует, $\tau \geq 1$ — момент остановки, причем $\mathbb{E}\tau < \infty$. Обоснуйте равенство $\mathbb{E}S_\tau = \mu\mathbb{E}\tau$.

(ii) Пусть в условиях пункта (i) $\mu = 0$ и $\sigma^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 < \infty$. Докажите, что $\mathbb{E}S_\tau^2 = \sigma^2\mathbb{E}\tau$.

(iii) Пусть величина $g(t) = \mathbb{E}e^{t\xi_1}$ при некотором $t \neq 0$ конечна и ≥ 1. Обоснуйте равенство $1 = \mathbb{E}e^{tS_n}g(t)^{-\tau}$.

Задача 7. Пусть $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = -1) = q = 1-p$. Пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\tau = \int\{n \geq 1\colon S_n = k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите (для всех значений p, q) $\mathbb{E}\tau$ и $P(\tau < \infty)$.

Задача 8. Равновероятно выбирается буква из русского алфавита. Эксперимент повторяется независимым образом неограниченное число раз. Для определения среднего времени появления слова АБРАКАДАБРА используем следующую вспомогательную игру. Первый игрок ставит рубль, что на первом шаге появится буква А. Если он проигрывает, то прекращает игру. Если выигрывает, то ставит весь свой выигрыш на то, что на втором шаге появится буква Б и т.д. Игрок завершает игру, когда проигрывает или получает требуемое слово. Второй игрок ставит рубль, что на втором шаге появится буква А. Если он проигрывает, то прекращает игру. Если выигрывает, то ставит весь свой выигрыш на то, что на втором шаге появится буква Б и т.д. Игрок завершает игру, когда проигрывает или получает требуемое слово. Следующие игроки действуют аналогично. Пусть ξ_n — выпавшая на n-м шаге буква, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и X_n — суммарный выигрыш игроков на n-м шаге. Докажите, что $(X_n, \mathcal{F}_n)$ — мартингал. Пусть τ — момент появления нужного слова. Докажите, что τ — момент остановки относительно $\mathcal{F}_n$ и $\mathbb{E}\tau < \infty$. Найдите $\mathbb{E}X_\tau$ и $\mathbb{E}\tau$.

Задача 9. Пусть $\xi_n \to \xi$ почти наверное и $|\xi_n| \leq \eta$, причем $\mathbb{E}\eta < \infty$. Предположим, что ξ_n согласована с $\mathcal{F}_n$. Тогда $\mathbb{E}(\xi_m|\mathcal{F}_n)$ стремится к $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_\infty)$ при $n, m \to \infty$, где $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

Задача 10. На вероятностном пространстве $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$, P — мера Лебега, рассмотрим последовательность случайных величин H_k (функции Хаара), где $H_0 = 1$, $H_{2^m+1}(x) = 2^{m/2}$ при $0 \leq x < 2^{-m-1}$, $H_{2^m+1}(x) = -2^{m/2}$ при $2^{-m-1} \leq x < 2^{-m}$, $H_{2^m+1}(x) = 0$ при $x \notin [0, 2^{-m})$, $H_{2^m+j}(x) = H_{2^m+1}(x - (j-1)2^m)$ при $j = 1, \ldots, 2^m$.

(i) Проверьте, что H_k — ортонормированная система в $L^2(\Omega)$.

(ii) Найдите $\mathbb{E}(f|\sigma(H_0, \ldots, H_n))$ для $f \in L^1(\Omega)$.

(iii) Докажите, что ряд Фурье $f \in L^1(\Omega)$ по системе H_k сходится к f почти всюду на промежутке $[0, 1)$ и в $L^1[0, 1]$.

Задача 11. Пусть f интегрируема по Лебегу на $L^1[0, 1]$ и f продолжена до 1 — периодической функции на $\mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$g_n(x) = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} f(x + j2^{-n})$$

сходится почти всюду к $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Задача 12. Пусть μ_n — последовательность борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}$. Предположим, что борелевская функция f на $\mathbb{R}^\infty$ интегрируема относительно $\otimes_n \mu_n$. Докажите, что функции

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \int f(x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots) \otimes_{k\geq n+1} \mu_k(dy)$$

сходятся почти всюду и в $L^1(\otimes_n \mu_n)$ к функции f.