НМУ, II курс, 24.10.2024

Листок 3.

Задача 1. Пусть $n \geq 2$ и случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, а их совместное распределение не меняется при ортогональных преобразованиях. Докажите, что $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – одинаково распределенные гауссовские величины с нулевым математическим ожиданием.

Задача 2. Пусть ξ_n — последовательность гауссовских d–мерных векторов, которая сходится почти наверное к некоторой случайной величине ξ. Докажите, что вектор ξ имеет гауссовское распределение, причем вектор средних и матрица ковариации ξ являются пределами векторов средних и матриц ковариаций векторов ξ_n.

Задача 3. Пусть w_t — винеровский процесс. Найдите распределение $\displaystyle\int_0^1 w_t\,dt$.

Задача 4. Пусть w_t^1 и w_t^2 — независимые винеровские процессы. Найдите распределение случайной величины $\sqrt{(w_t^1)^2 + (w_t^2)^2}$.

Задача 5. Пусть w_t — винеровский процесс на $[0, T]$.

(i) Пусть $\mathbb{T}$ — разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_1 < \ldots < t_n = T$. Положим $\lambda(\mathbb{T}) = \max_k |t_k - t_{k=1}|$. Докажите, что

$$\lim_{\lambda(\mathbb{T})\to 0} \mathbb{E}\Big(\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 - T\Big)^2 = 0.$$

(ii) Пусть $t_k = \frac{kT}{2^n}$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n$. Докажите, что почти наверное

$$\sum_k (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2 \to T.$$

(iii) Докажите, что почти наверное функция $t \to w_t$ имеет бесконечную вариацию на отрезке $[0, T]$.

Задача 6. Пусть $f \in C[0, T]$, $p > 1$, $\alpha > 0$. Докажите неравенство

$$|f(t) - f(s)|^p \leq C(p, \alpha, T)|t - s|^{-1+p\alpha} \int_0^T \int_0^T \frac{|f(u) - f(v)|^p}{|u - v|^{1+p\alpha}}\,du\,dv.$$

Задача 7. Используя предыдущую задачу обоснуйте, что траектории винеровского процесса на отрезке $[0, T]$ почти наверное удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{2} - \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Задача 8.

(i) Обоснуйте равенство

$$\frac{1}{\pi}(t - s)^2 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\Big(\sin nt - \sin ns\Big)^2 = |t - s|, \quad s, t \in [0, \pi].$$

(ii) Пусть $\xi_n \sim N(0, 1)$ — независимые величины. Проверьте, что для некоторой последовательности номеров N_k суммы

$$\frac{\xi_0 t}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{N_k} \xi_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin nt}{n}$$

сходятся почти наверное равномерно на $[0, \pi]$ и их предел является винеровским процессом на $[0, \pi]$.

Задача 9. Пусть w_t — винеровский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) Докажите, что случайный процесс $c^{-1}w_{c^2t}$, где число c положительно, является винеровским процессом.

(ii) Докажите, что $tw_{1/t}$ почти наверное стремится к нулю при $t \to 0+$.

(ii) Докажите, что найдется такое $\Omega' \in \mathcal{F}$, что $P(\Omega') = 1$ и процесс $\xi_t(\omega) = tw_{1/t}(\omega)$ при $\omega \in \Omega'$, $\xi_t(\omega) = 0$ при $\omega \notin \Omega'$ и $\xi_0 = 0$, является винеровским процессом.

Задача 10. Пусть w_t — винеровский процесс. Докажите, что почти наверное $e^{w_t - t/2}$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, но для всякой последовательности $t_k \to \infty$

$$\mathbb{E}\sup_k e^{w_{t_k} - t_k/2} = \infty.$$

Задача 11. С помощью закона повторного логарифма для винеровского процесса и теоремы Фубини докажите, что с вероятностью единица у траектории винеровского процесса почти всюду нет производной.

Задача 12.

(i) Пусть w_t — винеровский процесс, g – ограниченная с ограниченными производными гладкая функция и $T > 0$. Пусть случайная величина τ такова, что для всякого $t \geq 0$ событие $\{\tau \leq t\}$ измеримо относительно $\sigma(w_s, s \leq t)$. Докажите, что для функции $u(x,t) = \mathbb{E}g(x + w_{T-t})$ верно равенство

$$\mathbb{E}u(t + \tau \wedge T, x + w_{\tau\wedge T}) = u(t, x).$$

(ii) С помощью пункта (i) и выбора функции g найдите распределение $\max_{[0,T]} w_t$, где w_t — одномерный винеровский процесс.

Задача 13. Пусть w_t — винеровский процесс на $[0,1]$. Положим

$$B_t^n(\omega) = w_{\frac{k}{2^n}}(\omega) + 2^n(t - \tfrac{k}{2^n})\big(w_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) - w_{\frac{k}{2^n}}(\omega)\big).$$

Запишите B_t^n с помощью условного математического ожидания w_t относительно двоично-рационального разбиения и докажите, что для всякого $0 < \gamma < \frac{1}{2}$) почти наверное выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \|B^n - w\|_\gamma = 0,$$

где

$$\|x\|_\gamma = \max_{t\in[0,1]} |x_t| + \sup_{s\neq t} \frac{|x_t - x_s|}{|t-s|^\gamma}.$$

Задача 14. Пусть мера P_1 на $C[0,1]$ является распределением процесса $\sigma_1 w_t$, мера P_2 на $C[0,1]$ является распределением процесса $\sigma_2 w_t$, где w_t — винеровский процесс и выполнены неравенства $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Докажите, что найдутся два борелевских множества A и C, для которых выполнено $A \cap C = \emptyset$, $P_1(A) = 1$ и $P_2(C) = 1$.

Задача 15. Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что не существует вероятностной меры γ на H, у которой преобразование Фурье равно $\exp(-\|h\|^2/2)$.

Задача 16. Пусть H — гильбертово пространство и γ — центрированная гауссовская мера на H. Ковариационный оператор K определяется равенством

$$\langle Kx, y\rangle = \int \langle x, u\rangle\langle u, y\rangle \gamma(du).$$

Докажите, что K является компактным самосопряженным оператором. Найдите пространство Камерона–Мартина. Рассмотрите в качестве примера меру Винера на $L^2[0,1]$ и получите новое описание пространства Камерона–Мартина.