НМУ, II курс, 31.10.2024

Листок 4.

Задача 1. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство. Докажите, что последовательность δ_{x_n} сходится слабо к δ_a тогда и только тогда, когда x_n сходится к a.

Задача 2. Пусть $g_N(x) = N^d g(Nx)$, где $g \geq 0$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ и $\|g\|_{L^1} = 1$. Докажите, что для всякой вероятностной меры μ последовательность $g_N * \mu(x)\,dx$ сходится слабо к μ.

Задача 3. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство и $f_n, f\colon X \to X$ — борелевские отображения, причем $f_n(x) \to f(x)$ для каждого x. Докажите, что для всякой вероятностной меры μ последовательность мер $\mu_n = \mu \circ f_n^{-1}$ слабо сходится к мере $\mu \circ f^{-1}$.

Задача 4. Докажите, что последовательность вероятностных мер μ_n сходится слабо к μ на $\mathbb{R}^\infty$ тогда и только тогда, когда для всякого N меры $\mu_n \circ P_N^{-1}$ сходятся слабо к $\mu \circ P_N^{-1}$, где $P_N(x) = (x_1, \ldots, x_N)$.

Задача 5. Докажите, что всякую вероятностную меру μ на полном сепарабельном метрическом пространстве можно по метрике Канторовича–Рубинштейна приблизить конечными выпуклыми комбинациями дельта мер.

Задача 6. Для вероятностной меры μ на $\mathbb{R}$ постройте такую последовательность x_n, что меры

$$N^{-1}\bigl(\delta_{x_1} + \ldots + \delta_{x_N}\bigr)$$

сходятся слабо к μ при $N \to \infty$.

Задача 7. Пусть (X, ϱ) — полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathcal{P}(X)$ — пространство вероятностных мер. Докажите, что семейство мер $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ удовлетворяет условию

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_\varepsilon - \text{компакт} \quad \mu(K) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \mathcal{M},$$

тогда и только тогда, когда существует такая неотрицательная борелевская функция F, что множества $\{x\colon\ F(x) \leq c\}$ компактны для всякого c и

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \int_X F(x)\mu(dx) < \infty.$$

Задача 8. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$. Найдите

$$W_2\Bigl(\frac{\delta_a + \delta_b}{2}, \frac{\delta_c + \delta_d}{2}\Bigr).$$

Покажите, что оптимальных планов может быть несколько.

Задача 9. Пусть вероятностные меры μ и σ на $\mathbb{R}$ имеют непрерывные и строго возрастающие функции распределения. Докажите, что

$$W_2\bigl(\mu, \sigma\bigr) = \sqrt{\int_0^1 \bigl|F_\mu^{-1}(y) - F_\sigma^{-1}(y)\bigr|^2\, dy}.$$

Задача 10. Пусть μ_0 и μ_1 — вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$ и π — оптимальный план, на котором достигается $W_2(\mu_0, \mu_1)$. Докажите, что кривая $\mu_t = \pi \circ ((1-t)x + ty)^{-1}$, где $t \in [0, 1]$, является геодезической постоянной скорости, то есть для всех $s, t \in [0, 1]$ верно равенство $W_2(\mu_t, \mu_s) = |t - s| W_2(\mu_0, \mu_1)$.