1. Пусть X, Y, Z – топологические пространства с отмеченными точками, причем Y локально компактно. Докажите, что естественное отображение

$$\Psi\colon \mathrm{Map}^{\tau}_{\bullet}(X \wedge Y, Z) \to \mathrm{Map}^{\tau}_{\bullet}\big(X, \mathrm{Map}^{\tau}_{\bullet}(Y, Z)\big)$$

является биекцией. Более того, если X и Y хаусдоровы, то Ψ гомеоморфизм.

2. Пусть X, Y – топологические пространства с отмеченными точками и X – хаусдорфово. На лекции было доказано, что

$$\pi_0\big(\mathrm{Map}^{\tau}_{\bullet}(X, Y)\big) = [X, Y]_{\bullet}.$$

Опишите старшие гомотопические группы пространства $\mathrm{Map}^{\tau}_{\bullet}(X, Y)$ в терминах гомотопических классов отображений пространств.

3. Пусть A – компактное топологическое пространства, X – CW комплекс и $f\colon A \to X$. Докажите, что существует конечный CW подкомплекс $X' \subset X$ такой, что $f(A) \subset X'$.

4. Пусть $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ – канторово множество. Докажите, что C не гомотопически эквивалентно никакому CW комплексу.

5. Пусть X – CW комплекс и $A \subset X$ – подкомплекс. Докажите, что X/A – CW комплекс.

6. Докажите следующие утверждения.
   a) Вложение верхнего основания цилиндра $i\colon X \to X \times I;\ i(x) = (x, 1)$ является корасслоением.
   b) Проекция $p\colon PX \to X;\ p(\gamma) = \gamma(1)$ является расслоением.

7. Пусть $i\colon A \to X$ – корасслоение. Докажите, что существует отображение $p\colon X \to A$ такое, что $p \circ i = \mathrm{Id}_A$. В частности, i инъективно.

8. Докажите, что вложение $i\colon A \to X$ является корасслоением тогда и только тогда, когда $X \times \{0\} \bigcup A \times I \subset X \times I$ является ретрактом пространства $X \times I$. Напомним, что $B \subset Y$ называется ретрактом Y, если существует $r\colon Y \to Y$ такое, что $r\big|_B = \mathrm{id}_B$ и $r(Y) = B$.

9. Пусть $(X, x_0), (Y, y_0)$ – топологические пространства с отмеченными точками и пространство Y линейно связно.
   a) Докажите, что если вложение $i\colon x_0 \to X$ является корасслоением, то любое отображение $f\colon X \to Y$ гомотопно отображению f' такому, что $f'(x_0) = y_0$.
   b) Докажите, что если вложение $i \times \mathrm{Id}\colon x_0 \times I \to X \times I$ является корасслоением, то естественное отображение $[X, Y]_{\bullet} \to [X, Y]$ является биекцией.
   c) Приведите пример набора $(X, x_0), (Y, y_0), f\colon X \to Y$ такого, что f не гомотопно никакому отображению, переводящему отмеченную точку в отмеченную точку.

   Отметим, что для CW комплексов упомянутое вложение $i \times \mathrm{Id}$ является корасслоением.

10. Докажите следующие утверждения.
   a) Пусть $p\colon E \to B$ – расслоение и $f\colon B' \to B$ – отображение. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

   Тогда $p'\colon E' \to B'$ – расслоение.

b) Пусть $i\colon A \to X$ – корасслоение и $g\colon A \to A'$ – отображение. Рассмотрим кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & A' \arrow[d, "i'"] \\ X \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

Тогда $i'\colon A' \to X'$ – корасслоение.

11. Пусть $f\colon X \to Y$ отображение топологических пространств. Определим пространства $\widetilde{X}$ и $\widehat{Y}$ как пулбек и пушаут следующих диаграмм соответсвенно.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "s"] & Y^I \arrow[d, "p_0"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \times I \arrow[r] & \widehat{Y} \end{tikzcd}$$

где $Y^I = \mathrm{Map}^\tau(I, Y)$; $p_0(\gamma) = \gamma(0)$ и $i_0(x) = (x, 0)$. Докажите, что

a) отображения s и t являются гомотопическими эквивалентностями с гомотопически обратными $h\colon X \to \widetilde{X},\ h(x) = (x, c_{f(x)})$ и $\tilde{h}\colon \widehat{Y} \to Y, \tilde{h}(x,t) = f(x)$ соответственно;

b) отображение $p\colon \widetilde{X} \to Y$ такое, что $p(x, \gamma) = \gamma(1)$, является расслоением;

c) отображение $i\colon X \to \widehat{Y}$ такое, что $i(x) = (x, 1)$, является корасслоением;

d) разложение отображения f в виде композиций

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & \widetilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ Y & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"] & Y \\ & \widehat{Y} \arrow[u, "\tilde{h}"] \end{tikzcd}$$

функториально по f.

e) Пусть $f = p' \circ h'$ – произвольное разложение отображения f в виде композиции гомотопической эквивалентности h' и раслоения p'. Пусть $y \in Y$ – точка. Докажите, что слои $p^{-1}(y)$ и $(p')^{-1}(y)$ гомотопически эквивалентны. Гомотопический тип слоя $p^{-1}(y)$ называется гомотопическим слоем отображения f (над точкой y).

f) Пусть $f = \tilde{h}' \circ i'$ – произвольное разложение отображения f в виде композиции корасслоения i' и гомотопической эквивалентности $\tilde{h}'$. Докажите, что кослои отображений i и i' гомотопически эквивалентны. Напомним, что кослоем отображения $g\colon X \to Y$ называется пушаут диаграммы $\mathrm{pt} \leftarrow X \xrightarrow{g} Y$. Гомотопический тип кослоя отображения i называется гомотопическим кослоем отображения f.

12. Пусть $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ – отображение пространств с отмеченной точкой. Если не оговорено противное, все отображения и гомотопии сохраняют отмеченную точку.

a) Докажите, что слой $p^{-1}(y_0)$, где p – отображение из задачи 11.d), гомеоморфен пространству $F(f)$, определенному как пулбек диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(f) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & PY \arrow[d, "p_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

b) Пусть $g\colon W \to Y$ – отображение пространств с отмеченной точкой. Докажите, что отображения $g'\colon W \to F(f)$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(f) \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "f"] & X \\ W \arrow[u, "g'"] \arrow[ur, "g"] & & \end{tikzcd}$$

коммутативна, находятся во взаимно однозначном соответсвии с сохраняющими отмеченную точку нуль-гомотопиями композиции $f \circ g$.

c) Если отображение f – расслоение, то естественное отображение $f^{-1}(y_0) \to F(f)$ является гомотопической эквивалентностью.

d) Пусть дана следующая коммутативная диаграмма в $\mathrm{Top}_\bullet$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y' \end{tikzcd}$$

Докажите, что имеется индуцированное отображение $\varphi_F\colon F(f) \to F(f')$ и если отображения φ_X и φ_Y являются гомотопическими эквивалентностями, то отображение φ_F также является гомотопической эквивалентностью.

e) Докажите, что гомотопический тип слоя $F(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f.

$f^\dagger$) Гомотопическим пулбеком диаграммы $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ называется гомотопический класс пространства $P(f,g)$ определнного как пулбек диаграммы

$$\begin{tikzcd} P(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

где пространство $\widetilde{Y}$ и отображение p соответсвуют разложению отображения g из задачи 11.d). Докажите следующее утверждение, аналогичное утверждению задачи 12.d) (перед этим хорошо бы доказать аналоги всех предыдущих пунктов). Пусть дана следующая коммутативная диаграмма в $\mathrm{Top}_\bullet$:

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dl] \arrow[dd, "\varphi_Y"] \\ X \arrow[r] \arrow[dd, "\varphi_X"] & Z \arrow[dd, "\varphi_Z"] & \\ & & Y' \arrow[dl] \\ X' \arrow[r] & Z' & \end{tikzcd}$$

Обозначим через $P = P(f,g)$, $P' = P(f',g')$. Докажите, что имеется индуцированное отображение $\varphi_P\colon P \to P'$. Более того, если все отображения $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_Z$ –

гомотопические эквивалентности, то отображение φ_P также является гомотопической эквивалентностью.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "\varphi_P"] & & Y \arrow[dl] \arrow[dd, "\varphi_Y"] \\
X \arrow[rr] \arrow[dd, "\varphi_X"] & & Z \arrow[dd, "\varphi_Z"] & \\
& P' \arrow[rr] \arrow[dl] & & Y' \arrow[dl] \\
X' \arrow[rr] & & Z' &
\end{tikzcd}$$

$g^\dagger$) Сформулируйте и докажите аналог пункта e) для пункта f) (т.е. в каком смысле гомотопический пулбек зависит от гомотопического типа диаграммы).

13. Пусть $f\colon X \to Y$ – отображение пространств с отмеченной точкой, $p\colon F(f) \to X$ есть отображение i из задачи 12.a).

    a) Докажите, что p является расслоением.

    b) Докажите, что гомотопический слой отображения p есть пространство ΩY, и включение гомотопического слоя гомотопно отображению $\iota\colon \Omega Y \to F(f)$; $\iota(\gamma) = (x_0, \gamma)$.

    c) Докажите, что в последовательности

    $$\cdots \to \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega\iota} \Omega F(f) \xrightarrow{-\Omega p} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\iota} F(f) \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$$

    для любых трех последовательных членов $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ отображение $A \xrightarrow{a} B$ гомотопно отображению $A \xrightarrow{\varphi} F(b) \xrightarrow{i} B$, где $F(b) \xrightarrow{i} B$ – каноническое включение гомотопического слоя, и $A \xrightarrow{\varphi} F(b)$ – гомотопическая эквивалентность.

    d) Докажите, что для любого пространства W с отмеченной точкой имеется длинная точная последовательность отмеченных множеств

    $$\cdots \to [W, \Omega^2 Y]_\bullet \to [W, \Omega F(f)]_\bullet \to [W, \Omega X]_\bullet \to [W, \Omega Y]_\bullet \to [W, F(f)]_\bullet \to [W, X]_\bullet \to [W, Y]_\bullet.$$

    Обратите внимание, что на множестве $[A, \Omega B]_\bullet$ есть каноническая структура группы, а на множестве $[A, \Omega^2 B]_\bullet$ соответствующая группа будет абелева. Все отображения из точной последовательности между группами будут уважать групповую структуру.

14. Пусть $f\colon X \to Y$ – отображение топологических пространств.

    a) Докажите, что кослой $\widehat{Y}/i(X)$, где i и $\widehat{Y}$ как в задаче 11.d), гомеоморфен пространству $C(f)$, определенному как пушаут следующей диаграммы.

    $$\begin{tikzcd}
    X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d] \\
    Y \arrow[r] & C(f)
    \end{tikzcd}$$

b) Пусть $g\colon Y \to W$ – отображение. Докажите, что отображения $g'\colon C(f) \to W$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & W \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r] & C(f) \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, находятся во взаимно однозначном соответсвии с нуль-гомотопиями композиции $g \circ f$.

c) Если отображение f – корасслоение, то естественное отображение $C(f) \to Y/f(X)$ является гомотопической эквивалентностью.

d) Пусть дана следующая коммутативная диаграмма в Top:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\varphi_Y"] & Y' \end{tikzcd}$$

Докажите, что имеется индуцированное отображение $\varphi_C\colon C(f) \to C(f')$ и если отображения φ_X и φ_Y являются гомотопическими эквивалентностями, то отображение φ_C также является гомотопической эквивалентностью.

e) Докажите, что гомотопический тип кослоя $C(f)$ зависит только от гомотопического класса отображения f.

$f^\dagger$) Докажите утверждение, аналогичное 12.f).

$g^\dagger$) Докажите утверждение, аналогичное 12.g).

h) Сформулируйте и докажите все пункты задачи для $\mathrm{Top}_\bullet$.

15. Пусть $f\colon X \to Y$ – отображение топологических пространств, $i\colon Y \to C(f)$ есть отображение из задачи 14.a).

a) Докажите, что i является корасслоением.

b) Докажите, что гомотопический кослой отображения i есть пространство ΣX и отображение в гомотопический кослой гомотопически эквивалентно отображению факторизации $C(f) \to \Sigma X$.

c) Докажите, что в последовательности

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{q} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma i} \Sigma C(f) \xrightarrow{-\Sigma q} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \to \dots$$

для любых трех последовательных членов $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C$ отображение $B \xrightarrow{b} C$ гомотопно отображению $B \xrightarrow{p} C(b) \xrightarrow{\varphi} B$, где $B \xrightarrow{p} C(b)$ – каноническое отображение в гомотопического кослой и $C(b) \xrightarrow{\varphi} B$ – гомотопическая эквивалентность.

d) Докажите, что для любого пространства W имеется длинная точная последовательность отмеченных множеств

$$\dots \to [\Sigma^2 X, W] \to [\Sigma C(f), W] \to [\Sigma Y, W] \to [\Sigma X, W] \to [C(f), W] \to [Y, W] \to [X, W].$$

e) Сформулируйте и докажите все пункты задачи для полной подкатегории в $\mathrm{Top}_\bullet$, состоящей из пространств (X, x) таких, что вложение точки $x \to X$ является корасслоением. В аналоге пункта d) обратите внимание, что на множестве $[\Sigma A, B]_\bullet$ есть каноническая структура группы, а на множестве $[\Sigma^2 A, B]_\bullet$ соответствующая группа будет абелева. Все отображения из точной последовательности между группами будут уважать групповую структуру.

Для подсказок по задачам про гомотопические слои и кослои смотрите следующие источники: panov1, cofiber, fiber, hopullbacks.