Тензорные произведения модулей и алгебр.

Задача 1. Докажите, что $U^* \otimes V^*$ канонически вкладывается в $(U \otimes V)^*$, причём вложение – изоморфизм в случае конечномерных пространств, иначе – не изоморфизм. Выведите отсюда, что $U \otimes V \simeq \mathcal{L}(U, V; \Bbbk)^*$ в случае конечномерных векторных пространств.

Задача 2. В соответствии с изоморфизмом $Hom(U, V) \simeq U^* \otimes V$ запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum \alpha_i \otimes a_i, B = \sum \beta_i \otimes b_i$, где $\alpha_i \in U^*, a_i \in V, \beta_i \in V^*, b \in W$. Запишите аналогичным образом произведение $BA \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

Задача 3. Пусть $e_i, e_i^*, i = 1, \dots n$ — двойственные базисы пространств V и V^* соответственно. В какой эндоморфизм пространства V переходит при изоморфизме $\mathrm{End}(V) \simeq V^* \otimes V$ тензор Казимира $\Omega = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i^*$?

Задача 4. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq Hom(V, U \otimes W).$$

Что можно сказать в случае бесконечномерных пространств?

Задача 5. а) Докажите, что $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\text{НОД}(m, n)\mathbb{Z}$;
б) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$;
в) Пусть

$$M = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}\ b = p_1 \dots p_n, p_i - \text{различные простые}\};$$
$$N = \mathbb{Q}/\{a/b \in \mathbb{Q} \mid b - \text{нечётно}\}.$$

Докажите, что $M \otimes N \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
г) Верно ли, что $\mathbb{Z}[[x]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[[x]]$?
д) Верно ли, что $\Bbbk[[x]] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[[y]] \simeq \Bbbk[[x, y]]$?

Задача 6. Пусть $N : V \to V$ – нильпотентый оператор на конечномерном пространстве V. Выразите цикловой тип $N^{\otimes 2} : V \otimes V \to V \otimes V$ через цикловой тип N.

Задача 7. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V.
а) Выразите $\mathrm{tr}\, S^2\mathcal{A}$ и $\mathrm{tr}\, \Lambda^2\mathcal{A}$ через $\mathrm{tr}\, \mathcal{A}$.
б) Собственные значения $S^k\mathcal{A}$ и $\Lambda^k\mathcal{A}, k \geq 1$ через собственные значения $\mathcal{A}$.

Задача 8. Докажите, что $\exp(A \otimes E + E \otimes A) = \exp(A) \otimes \exp(A) \in M_{n^2}(\mathbb{C})$, где A произвольная, E – единичная матрица из $M_n(\mathbb{C})$.

Задача 9. а) Для любого векторного пространства V над полем характеристики $char(\Bbbk) \neq 2$ постройте канонический изоморфизм $V \otimes V^* \simeq S^2V \oplus \Lambda^2V$ и покажите, что $V \otimes V \otimes V \not\simeq S^3V \oplus \Lambda^3V$.
б) Явно предъявите тензор $t \in V^{\otimes 3}$, не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.

Задача 10. Пусть $n = 2m$ и $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ – кососимметрическая матрица. Пусть

$$a = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j.$$

Докажите, что
а) $a^m = (m!\, \mathrm{pf}\, A) \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, где

$$\mathrm{pf}\, A := \sum_{i_1 i_2 | \dots | i_{n-1} i_n} \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_n) a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i_n}$$

– пфаффиан матрицы A (суммирование по всевозможным разбиениям на пары, порядок в паре произвольный);
б) $\mathrm{pf}(CAC^T) = \det C \cdot \mathrm{pf}\, A$;
в) $\mathrm{pf}(A)^2 = \det A$.

Задача 11. Докажите, что если A – коммутативное кольцо, то $A/I \otimes_A A/J \simeq A/(I + J)$.