Теория представлений - 2.

Задача 1. Пусть G — группа, $H \subset G$ — подгруппа, V — представление G, W — представление H. Докажите, что

$$V \otimes \operatorname{Ind} W = \operatorname{Ind}(\operatorname{Res} V \otimes W).$$

Опишите явно представление $\operatorname{Ind}(\operatorname{Res} V)$.

Задача 2. Рассмотрим $G = SL_2(\mathbb{F}_q)$ и H — подгруппу верхних треугольных матриц. Пусть ω — гомоморфизм $(\mathbb{F}_q)^\times \to \mathbb{C}^\times$ и пусть

$$\chi_\omega : H \to \mathbb{C}^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \omega(a).$$

Покажите, что $\operatorname{Ind} \chi_\omega$ неприводим, если $\omega^2 \neq id$.

Задача 3. а) Пусть $H \subset G$ — абелева подгруппа. Покажите, что любое неприводимое представление G содержится в некотором $\operatorname{Ind} W$, где W — неприводимое представление H.

б) Покажите, что если G имеет абелеву подгруппу индекса n, то любое неприводимое представление G имеет размерность $\leq n$.

в) Пусть T — произвольное неприводимое представление G. Используя двойственность Фробениуса, покажите, что оно содержится в регулярном представлении с кратностью, равной $\dim T$.

Задача 4. Пусть $n, p \in \mathbb{Z}_{>0}$ такие, что $n | p - 1$.

а) Покажите, что полупрямое произведение $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфно группе

$$\langle a, b \,|\, bab^{-1} = a^k \rangle$$

для некоторого k, где $k^n = 1 \pmod{p}$. Когда два полупрямых произведения изоморфны?

б) Классифицируйте все неприводимые представления $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и вычислите их характеры.

Задача 5. Пусть $G = D_{2n}$, диэдральная группа. Пусть $C \subset G$ — нормальная циклическая подгруппа порядка n. Используя формулу для характера индуцированного представления, определите, для каких неприводимых характеров χ группы C характер $\operatorname{Ind} \chi$ является неприводимым. Постройте таблицу характеров группы G.