Свёртки, ассоциативные алгебры - 1.

Задача 1. Покажите, что свёртка тензорного произведения операторов как элементов $V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V$ по второму и третьему сомножителям равна композиции операторов.

Задача 2. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен

$$9x^3 - 15x^2y - 6x^2z + 9xy^2 + 18xz^2 - 2y^3 + 3y^2z - 15yz^2 + 7z^3$$

в многочлен от ≤ 2 переменных? Если да, то предъявите эту замену явно.

Задача 3. Опишите с точностью до изоморфизма алгебры размерности 2 над полем $\Bbbk$.

Задача 4*. Покажите, что кольцо

$$R = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{R} \}$$

является правым артиновым, но не является левым артиновым.

Задача 5. а) Докажите, что алгебра матриц $M_n(\Bbbk)$ над полем $\Bbbk$ – простая.
б) Докажите, что алгебра Вейля $\mathbb{Q}[x, y]/(xy - yx - 1)$ – простая бесконечномерная алгебра.

Задача 6. а) Посчитайте явно регулярное представление алгебр $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$ в базисе $1, i$ и $1, i, j, k$ соответственно. **б)** Докажите, что комплексификация, т.е. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ изоморфна $M_2(\mathbb{C})$.