Ассоциативные алгебры и модули.

Задача 1. а) Пусть $L, N \subset M$ - подмодули. Докажите, что
$$(L+N)/N \simeq L/(L \cap N)$$
б) Пусть A – алгебра, $B \subset A$ - подалгебра, $I \subset A$ - идеал. Докажите, что
$$(B+I)/I \simeq B/B \cap I.$$

Задача 2. Опишите все неразложимые и неприводимые представления алгебры **а)** $\mathbb{C}[x]$ **б)** $\mathbb{R}[x]$.

Задача 3. Рассмотрим $V = \Bbbk^n$ как представление алгебры $T_n(\Bbbk)$ треугольных матриц. Опишите все подмодули V, докажите, что V - неразложим, опишите его композиционный ряд, опишите $\mathrm{End}_A(V)$.

Задача 4. Докажите, что неприводимое представление коммутативной алгебры над алгебраически замкнутым полем одномерно.

Задача 5. а) Пусть V – неприводимое счётномерное представление алгебры A над полем $\mathbb{C}$. Тогда $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}$. **б)** Рассмотрим $A = V = \mathbb{C}(x)$. Постройте нескалярный сплетающий оператор.

Задача 6. Пусть
$$A = \Bbbk\langle x, y\rangle/(xy - yx - 1)$$
– алгебра Вейля.
а) Докажите, что элементы $x^i y^j$ образуют базис в A.
б) Пусть $\mathrm{char}\, \Bbbk = 0$. Классифицируйте все неприводимые конечномерные представления A. Найдите все двусторонние идеалы в A.
в) Опишите центр A в зависимости от характеристики поля.
г) Пусть $\mathrm{char}\, \Bbbk = p$. Классифицируйте все неприводимые конечномерные представления A.

Задача 7*. Алгебра A_q над $\mathbb{C}$ порождена x, y, x^{-1}, y^{-1} с соотношениями
$$xy = qyx, xx^{-1} = x^{-1}x = yy^{-1} = y^{-1}y = 1$$
– q-алгебра Вейля.
а) Докажите, что элементы $x^i y^j$ образуют базис в A.
б) Опишите центр A_q в зависимости от q. Найдите все двусторонние идеалы в случае, когда q – не корень из единицы.
в) Для каких q у алгебры A_q существуют неприводимые конечномерные представления?
г) Для всех q из предыдущего пункта опишите неприводимые конечномерные представления.