Полупростые алгебры.

Задача 1. Опишите алгебры без нильпотентных элементов.

Задача 2. Пусть V – конечномерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – симметрическая билинейная форма. Определим алгебру Клиффорда

$$Cl(V) = TV/(v\otimes v - (v,v)\cdot 1)$$

а) Докажите, что если $V = \langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ базис V, то $e_I = e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}$, где $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ и 1 образуют базис в $Cl(V)$.
б) Докажите, что $Cl(V)$ полупроста тогда и только тогда когда форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена.
в) Докажите, что если форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена и $\dim V = 2k$, то $Cl(V)\simeq M_N(\mathbb{C})$. Найдите N.
г) Докажите, что если форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ невырождена и $\dim V = 2k+1$, то $Cl(V)\simeq M_N(\mathbb{C})\oplus M_N(\mathbb{C})$. Найдите N.

Задача 3. Докажите, что любой автоморфизм алгебры $M_n(D)$ – внутренний. Здесь D – алгебра с делением.

Задача 4. а) Докажите, что если A – конечномерная алгебра и любое представление A вполне приводимо, то A – полупроста.
б) Пусть $\rho : A\to \mathrm{End}(A)$ – левое регулярное представление и $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. Докажите, что A – полупроста тогда и только тогда когда форма $\langle a,b\rangle = \mathrm{tr}(\rho(a)\rho(b))$ невырождена.

Задача 5. а) Пусть G – конечная группа, $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. Докажите, что групповая алгебра $\Bbbk[G]$ полупроста.
б) Докажите, что элементы $b_C = \sum_{g\in C} g$, где C – класс сопряженности в G образуют базис центра групповой алгебры.
в) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ и $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$. Докажите, что число неприводимых представлений групповой алгебры равно количеству классов сопряженности в группе.