

ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ.

Задача 1. Опишите алгебры без нильпотентных элементов.

Задача 2. Пусть V – конечномерное векторное пространство над \mathbb{C} и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – симметрическая билинейная форма. Определим алгебру Клиффорда

$$Cl(V) = TV / (v \otimes v - (v, v) \cdot 1)$$

а) Докажите, что если $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ базис V , то $e_I = e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$, где $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ и 1 образуют базис в $Cl(V)$.

б) Докажите, что $Cl(V)$ полупроста тогда и только тогда когда форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена.

в) Докажите, что если форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена и $\dim V = 2k$, то $Cl(V) \simeq M_N(\mathbb{C})$. Найдите N .

г) Докажите, что если форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождена и $\dim V = 2k + 1$, то $Cl(V) \simeq M_N(\mathbb{C}) \oplus M_N(\mathbb{C})$. Найдите N .

Задача 3. Докажите, что любой автоморфизм алгебры $M_n(D)$ – внутренний. Здесь D – алгебра с делением.

Задача 4. а) Докажите, что если A – конечномерная алгебра и любое представление A вполне приводимо, то A – полупроста.

б) Пусть $\rho : A \rightarrow \text{End}(A)$ – левое регулярное представление. Докажите, что A – полупроста тогда и только тогда когда форма $\langle a, b \rangle = \text{tr}(\rho(a)\rho(b))$ невырождена.

Задача 5. а) Пусть G – конечная группа, $|G| = n$. Докажите, что групповая алгебра $\mathbb{k}[G]$ полупроста тогда и только тогда когда $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$.

б) Докажите, что элементы $b_C = \sum_{g \in C} g$, где C – класс сопряженности в G образуют базис центра групповой алгебры.

в) Пусть $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$ и $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$. Докажите, что число неприводимых представлений групповой алгебры равно количеству классов сопряженности в группе.