Полупростые алгебры - 2.

Задача 1. а) Докажите, что следующие условия для модуля над A эквивалентны:
1) M – полпростой модуль;
2) $M = \sum_i M_i$, где M_i – простые модули;
3) Любой модуль $N \subset M$ имеет дополнение;
4) Любой простой модуль $N \subset M$ имеет дополнение.
б) Докажите, что подмодуль и фактор-модуль полупростого модуля полупрост. Как устроен произвольный подмодуль модуля $M = \bigoplus_i k_i M_i$, где M_i – простые?

Задача 2. Докажите, что если $\mathrm{End}_A(M)$ – локальное кольцо, то модуль M – неприводим.

Задача 3. а) Пусть A – ассоциативная алгебра (не обязательно конечномерная). Докажите, что $Rad(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов. В частности, если A коммутативно, то с пересечением всех максимальных идеалов.
б) Докажите, что $Rad(A)$ совпадает с пересечением всех максимальных правых идеалов.
в) Верно ли, что любой элемент радикала нильпотентен? А если A конечномерна?
г) Найдите радикал алгебры верхнетреугольных матриц.

Задача 4. Докажите, что $[M_n(\Bbbk), M_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) = \{A \in M_n(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Верно ли это равенство, если заменить $\Bbbk$ на произвольную алгебру с делением?

Задача 5. Пусть $\Bbbk = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, K = \Bbbk(t)$, $A = K[x]/(x^4 - t^2)$. Найдите радикал $\operatorname{Rad} A$ и $A/\operatorname{Rad} A$. Докажите, что A не содержит подалгебры, изоморфной $A/\operatorname{Rad} A$.

Задача 6. Пусть V, W – конечномерные представления (не обязательно конечномерной) алгебры A над $\Bbbk$. Пусть $L \supset \Bbbk$ – расширение поля $\Bbbk$. Пусть $V \otimes_{\Bbbk} L \simeq W \otimes_{\Bbbk} L$ как модули над $A \otimes_{\Bbbk} L$. Докажите, что $V \simeq W$.

Задача 7. Пусть A, B две конечномерные алгебры над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что
а) Если V и W – неприводимые представления A и B соответственно, то $V \otimes W$ – нерпиводимое представление $A \otimes B$.
б*) Любое нерпиводимое представление $A \otimes B$ имеет вид из пункта а).
в*) Верны ли предыдущие пункты для не алгебраически замкнутого поля?