Алгебры с делением.

Задача 1. Докажите, что $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Верно ли, что тензорное произведение конечномерных простых алгебр – простая алгебра?

Задача 2. Пусть A – алгебра. Отображение $\delta : A \to A$ называется дифференцированием, если

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \forall\, a, b \in A$$

.

а) Верно ли что композиция дифференцирований дифференцирование? А коммутатор (т.е. $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$)?

б) Покажите, что для любого $a \in A$ отображение

$$\partial_a : A \to A, x \mapsto ax - xa$$

является дифференцированием. Такое дифференцирование называется внутренним.

в) Докажите, что отображение $T : A \to M_2(A), a \mapsto \begin{pmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{pmatrix}$ – гомоморфизм алгебр.

г) Докажите, что любое дифференцирование центральной простой алгебры A – внутреннее.

Задача 3. Пусть D_1 и D_2 – центральные алгебры с делением. Пусть $|D_1 : \mathbb{k}| = m, |D_2 : \mathbb{k}| = n$. Пусть n и m взаимнопросты. Докажите, что $D_1 \otimes D_2$ – алгебра с делением.

Задача 4. Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, E – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Пусть A – полупростая подалгебра в $End(E)$ и $B = End_A(E)$. Докажите, что

а) $A = \mathrm{End}_B(E)$ и B – полупроста.

б) Как представление $A \otimes B$ (или $A \times B^{op}$ бимодуль) имеем

$$V = \bigoplus V_i \otimes W_i,$$

где V_i – все неприводимые представления A, а W_i – все неприводимые представления B.

в) Пусть $V = \mathbb{C}^2$. Рассмотрите $E = V^{\otimes n}$ и действие S_n слева, а $GL_2(\mathbb{C})$ справа. Образ $\mathbb{C}[S_n]$ в $End(V^{\otimes n}$ обозначим через A, а образ $GL_2(\mathbb{C})$ через B. Докажите, что $B = End_A(E)$.

г) Опишите неприводимые представления $Gl_2(\mathbb{C})$, которые получаются пр применении пункта б).

Задача 5. Обозначим через $Br(K)$ группу Брауэра поля K, а если $L \supset K$, то относительную группу Брауэра через $Br(K/L)$. Докажите, что

а) $Br(\mathbb{k}(t)/\mathbb{k}) = 0$;

б*) Пусть $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$. Тогда $Br(\mathbb{k}(t)) = 0$;