Теория Галуа - 1.

Задача 1. Докажите, что поле характеристики ноль совершенно. Докажите, что поле K несовершенно тогда и только тогда когда $K^p \neq K$.

Задача 2. Пусть L/K – расширение Галуа. Докажите, что
а) Если $Gal(L/K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (и $\operatorname{char} K \neq 2$), то $L = K(\sqrt{a})$.
б) Если $Gal(L/K) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и существует такой $\xi \in K$, что $\xi^p = 1$ (и $\operatorname{char} K \neq p$), то $L = K(\sqrt[p]{a})$.

Задача 3. Пусть L поле разложения неприводимого над K ($\operatorname{char} K \neq 2, 3$) многочлена 3 степени с дискриминантом D.
а) Найдите группу Галуа расширений $L/K(\sqrt{D})$ и L/K.
б) Объясните, как решать уравнение третей степени.
в*) Пользуясь фактом, что $S_4/Z_2 \times Z_2 \simeq S_3$ объясните, как решать уравнение четвёртой степени.

Задача 4. Пусть $n_1, ..., n_k$ такой набор целых чисел, что никакое из непустых подмножеств не дает в произведении полный квадрат.
а) Докажите, что степень расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, ..., \sqrt{n_k})$ равна 2^k, найдите его группу Галуа, опишите все подрасширения.
б) Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, ..., \sqrt{n_k}) = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1} + \ldots + \sqrt{n_k})$.

Задача 5.
а) Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) \supset \mathbb{Q}$ – расширение Галуа и найдите его группу Галуа.
б) Найдите группу Галуа многочлена $x^5 - 2$ (то есть группу Галуа его поля разложения).
в) Докажите, что группа Галуа многолчлена $x^5 - x - \dfrac{1}{9}$ изоморфна S_5.