Теория Галуа - 2. Теорема Абеля-Руффини.

Все поля в этом листке характеристики 0.

Задача 1. Докажите, что группа Галуа многочлена

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

над полем $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ изоморфна S_n.

Задача 2. а) Пусть $F \subset R$ радикальное расширение и $F \subset K$ – некоторое расширение. Тогда $K \subset RK$ – радикальное расширение.
б) Пусть $F \subset L$ расширение Галуа и $F \subset K$ – некоторое расширение. Тогда $K \subset LK$ – расширение Галуа. Более того, $|LK : K| = |L : L \cap K|$.

Задача 3. Докажите, что если $F \subset E \subset L$ и $F \subset E$, $L \subset E$ – разрешимы в радикалах, то и $L \subset F$ разрешимо в радикалах.

Задача 4. Пусть K поле и K содержит примитивный корень степени n из единицы. Тогда следующие свойства расширения $K \subset L$ эквивалентны:
а) $L = K(\sqrt[n]{a})$.
б) L – расширение Галуа с циклической группой Галуа степени $d|n$.

Задача 5. Пусть $F \subset E$ – разрешимо в радикалах. Пусть $F \subset E \subset R$ – соответствующая башня расширений, где R – радикально. Тогда $F \subset nc(R/F)$ (нормальное замыкание) это радикальное расширение Галуа.

Задача 6. Пусть в башне расширений $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$ каждый шаг – расширение Галуа с абелевой группой Галуа. Тогда группа Галуа $Gal(F_n/F_1)$ – разрешима.

Задача 7. Пусть $f \in \mathbb{Q}[x]$ – неприводимый многочлен простой степени p.
а) Если $Gal(f)$ содержит транспозицию, то $Gal(f) \simeq S_p$.
б) Если у f ровно два корня из $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$, то $Gal(f) \simeq S_p$.
в) $Gal(x^5 - 5x + 2) \simeq S_5$.
г) Пусть $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $m \geq 5$ – нечётно. Рассмотрим набор $k_1, \ldots, k_{m-2}$ различных чётных чисел и определим $p(x) = (x^2 + n)(x - k_1) \ldots (x - k_{m-2}) - 2$. Докажите, что для достаточно большого n у $p(x)$ ровно два корня из $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.
д) Докажите, что существует неприводимый $f \in \mathbb{Q}[x]$ простой степени p с группой Галуа изоморфной S_p.