Теория представлений -1.

Задача 1. Группа S_n естественно действует на множестве $X = \{1, ..., n\}$. Пусть $r \leq \frac{n}{2}$ и пусть X_r — множество всех подмножеств X мощности r. Пусть π_r — соответствующее перестановочное представление.
а) Покажите, что для $1 \leq l \leq k \leq \frac{n}{2}$ $\langle \pi_k, \pi_l \rangle = l + 1$.
б) Покажите, что $\pi_r - \pi_{r-1}$ — характер неприводимого представления, и найдите размерность этого представления.
в) Вычислите таблицу характеров группы S_4 и S_5.
г) Разложите тензорное произведение неприводимых представлений в сумму неприводимых.

Задача 2. Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве $Fun(X, \mathbb{C})$, где X – множество рёбер или граней куба.

Задача 3. Пусть T точное комплексное представление G, а χ_T — соответствующий характером.
а) Покажите, что $|\chi(g)| \leq \dim T$ и $\chi(g) = \dim T$ только для $g = e$.
б) Вычислите характер χ для $(T \oplus \mathbb{C}_{triv})^{\otimes N}$ и $\langle \chi_T, \chi \rangle$.
в) Покажите, что любое неприводимое слагаемое возникает как неприводимое слагаемое для $T^{\otimes N}$ для некоторого N.

Определение. *Алгебраическое целое число — это элемент $z \in \mathbb{C}$, который является корнем многочлена с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент равен единице.*

Задача 4. Алгебраические целые числа образуют подкольцо $\mathbb{C}$.

Задача 5. а) Пусть $C \subset G$ — класс сопряженности. Покажите, что элемент $\varphi_C = \sum_{g \in C} g$ является центральным в $\mathbb{C}[G]$ и, следовательно, действует скаляром λ_C на любое неприводимое представление.
б) Покажите, что кольцо $\mathbb{Z}[G]$ является нётеровым $\mathbb{Z}$-модулем. Выведите из этого факта, что λ_C — алгебраическое целое число.
в) Пусть T — неприводимое представление конечной группы G. Вычислите $\langle \chi_T, \chi_T \rangle$ и покажите, что $\dim T \mid |G|$.

Задача 6. Покажите, что характеры конечной абелевой группы образуют группу $\hat{G}$, которая изоморфна G (не канонически).

Определение. *Пусть $f : G \to \mathbb{C}$ — функция, G — конечная абелева группа. Преобразование Фурье f — это функция $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(\chi) = \sum\limits_{x \in G} f(x)\chi(x)$. Преобразование Фурье — это отображение*

$$\mathcal{F}_G = \mathcal{F} : Fun(G) \to Fun(\hat{G})$$

Задача 7. ("Формула обращения Фурье") Пусть $S_G : Fun(G) \to Fun(G), f \mapsto g$ такое, что $g(x) = f(x^{-1}) \, \forall \, x \in G$. Покажите, что $\mathcal{F}_{\hat{G}} \circ \mathcal{F}_G = S_G$. Эквивалентно, для любого $f \in Fun(G)$

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(x) \overline{\chi(x)}.$$

Пусть G — произвольная конечная группа. Тогда существует изоморфизм векторных пространств $\alpha : \mathbb{C}[G] \to Fun(G)$, $\alpha(x) = \delta_x$ для любого $x \in G$. Определим свертку на $Fun(G)$:

$$f_1 * f_2 = \alpha(\alpha^{-1}(f_1)\alpha^{-1}(f_2)).$$

Обозначение: $Fun_*(G) = (Fun(G), *)$.

Задача 8. а) Покажите, что $(f_1 * f_2)(x) = \sum\limits_{yz=x} f_1(y) f_2(z) = \sum\limits_{y \in G} f_1(y) f_2(y^{-1}x)$
б) Пусть G — конечная абелева группа. Тогда $\mathcal{F} : Fun_*(G) \to Fun(\hat{G})$ — изоморфизм алгебр.
в) (теорема "Планшереля") $\mathcal{F}_G$ является унитарным изоморфизмом (здесь мы используем вторую формулу ортогональности для символов, чтобы определить эрмитову форму на $Fun(\hat{G})$).