НМУ, Дополнительные главы геометрии.
Экзамен. 23.12.2024.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее пятницы 27 декабря. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Оценка рассчитывается следующим образом. За каждый листок, в котором сдано не менее трех задач, начисляется 15 баллов. Задачи из листков можно сдавать до пятницы 27 декабря включительно. Всего листков было 6, то есть если сдать все, то это уже 90 баллов. К баллам за листки добавляются баллы за задачи, следующие ниже. Если сумма больше 100, то она заменяется на 100, то есть решать все задачи не надо, они даны с избытком, чтобы было, что выбрать. После чего оценка для НМУ рассчитывается так: $\geqslant 80$ «отлично», $\geqslant 60$ «хорошо», $\geqslant 40$ «удовлетворительно». Оценка для ВШЭ рассчитывается по формуле $\lceil \frac{\text{сумма баллов}}{10} \rceil$.

В конце список полезных книг.

Задача 1. Доказать, что $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. (10 баллов)

Задача 2*. Найти $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^3)$ и $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^3)$. (20 баллов)

Задача 3. Докажите, что для двумерного многообразия класс Тодда $\mathrm{Td}(M)$ равен 1. (15 баллов)

Задача 4*. Пусть $A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$ эллиптический дифференциальный оператор.

a) Докажите, что если $\operatorname{rk} \xi^0 = \operatorname{rk} \xi^1 = 1$, а $\dim M > 2$, то индекс A равен нулю. (20 баллов)

b) Заменим $\dim M > 2$ на $\dim M = 2$. Что тогда можно сказать про $\operatorname{ind} A$? (30 баллов)

Задача 5.

a) Доказать, что алгебра $\mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ изоморфна $\mathbb{H}$, и найти $\mathrm{C}^{\pm}(\mathbb{R}^2)$. (5 баллов)

b) Доказать, что группа $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2)$ изоморфна $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$, (5 баллов)

c) Доказать, что алгебра $\mathrm{C}(\mathbb{R}^4)$ изоморфна алгебре 2×2-матриц с кватернионными коэффициентами, и дать описание $\mathrm{C}^{\pm}(\mathbb{R}^4)$. (10 баллов)

d) Используйте предыдущий пункт, чтобы выяснить, как группа $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^4)$ связана с $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. (15 баллов)

Задача 6. Пусть M^n многообразие со спинорной структурой, $e_1, \ldots, e_n$ локальный ортонормированый базис в векторных полях, а $\mathbb{D}$ стандартный оператор Дирака в спинорном расслоении, то есть построенный по клиффордовой связности ∇^S. Докажите формулу Лихнеровича

$$\mathbb{D}^2 = -\sum_{i=1}^{n} [\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}] + \frac{R}{4},$$

где R — скалярная кривизна многообразия M. *Указание: удобно воспользоваться геодезическими координатами. Что за выражение стоит в квадратных скобках?* (30 баллов)

Задача 7. Выведите из предыдущей задачи, что если многообразие M компактно, а $R \geqslant 0$, причём есть хотя бы одна точка $x_0 \in M$, такая что $R(x_0) > 0$, то ядро $\mathbb{D}$ тривиально, откуда следует, что индекс оператора $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}|_{\Gamma(M, S^+)}$

равен нулю. *Указание: рассмотрите* $\int_M (\mathbb{D}^+ s, \mathbb{D}^+ s)\eta$, *где* η *форма объема.* (15 баллов)

Задача 8. Найдите символ стандартного оператора Дирака в спинорном расслоении, то есть построенного по клиффордовой связности ∇^S,

$$\mathbb{D} : \Gamma(M, S^\pm) \longrightarrow \Gamma(M, S^\mp)$$

и докажите, что он является эллиптическим. (20 баллов)

Задача 9*. Вычислите топологический индекс оператора Дирака

$$\mathbb{D}^+ : \Gamma(M, S^+) \longrightarrow \Gamma(M, S^-)$$

(то есть выражение в правой части формулы Атьи-Зингера, применённой к данному оператору). (50 баллов)

Задача 10. В лекциях мы определили лапласиан Бохнера в расслоении E как $\Delta^E = -\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M\otimes E}\nabla^E)$. Пусть $(\nabla^E)^* : \Omega^1(M,E) \longrightarrow \Gamma(M,E)$ дифференциальный оператор, сопряжённый к $\nabla^E : \Gamma(M,E) \longrightarrow \Omega^1(M,E)$. Докажите, что $\Delta^E = (\nabla^E)^*\nabla^E$. Иногда эта формула даётся в качестве определения. (25 баллов)

Задача 11. Рассмотрим уже знакомое нам по лекциям расслоение клиффордовых модулей $E = \Lambda^* T^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow M$ с клиффордовым действием

$$c(\alpha)\beta = \varepsilon(\alpha)\beta - \iota(\alpha)\beta$$

над римановым многообразием M размерности $n = 2l$. Рассмотрим оператор τ на E, определёный как $\tau(\omega) = i^{p(p+1)+l} \star \omega$, где $\omega \in \Omega^p(M)$, а $\star$ операция Ходжа. Доказать, что

a) $\tau^2 = \mathrm{id}$, а потому E распадается на сумму собственных подпространств $E^\pm$ оператора τ. (5 баллов)

b) Разложение $E = E^+ \oplus E^-$ задаёт на E структуру градуированного клиффордова модуля, отличную от структуры градуированного клиффордова модуля с градуировкой $E = \Lambda^{even} T^* M \oplus \Lambda^{odd} T^* M$ на формы чётной и нечётной степени. (5 баллов)

c) Оператор $d + d^*$ действует из $\Gamma(E^\pm)$ в $\Gamma(E^\mp)$ (10 баллов)

Формы из $\Gamma(E^+)$ называют автодуальными, а формы из $\Gamma(E^-)$ антиавтодуальными.

Задача 12. Найти аналитический (40 баллов) и топологический (50 баллов) индекс (то есть левую и правую часть равенства из теоремы Атьи-Зингера) для оператора $d + d^*$ из автодуальных форм в антиавтодуальные в случае, когда $\dim M = 4k$.

Список литературы

[1] Каруби М. K-теория.

[2] Кобаяси, Номидзу, Дифференциальная геометрия.

[3] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы.

[4] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.

[5] Постников, М. М., Лекции по геометрии, семестр IV, Дифференциальная геометрия.

[6] Федосов Б. В., Теоремы об индексе, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 65.* (Дифференциальные уравнения с частными производными-8). Стр. 165-268.

[7] Berline N., Getzler E., Vergne M., Heat Kernels and Dirac operators.