НМУ, 2 курс, дополнительные главы геометрии. Листок 1.
Векторные расслоения. К-группа. 4.10.2024.

Задача 1. Пусть E^1 и E^2 два локально тривиальных векторных расслоения над одной базой M. Доказать, что $E^1 \oplus E^2$ изоморфно $E^2 \oplus E^1$. Выведите из этого, что моноид $\mathrm{Vec}(M)$ абелев.

Задача 2. Пусть E подрасслоение евклидова (эрмитова) расслоения F. Доказать, что $E \oplus E^{\perp} \cong F$.

Задача 3. Доказать, что $T\mathbb{S}^3$ тривиальное расслоение.

Задача 4. Доказать, что $T\mathbb{S}^7$ тривиальное расслоение.

Задача 5. Пусть $\xi = (E, p, B)$ локально тривиальное расслоение, U_α его тривиализующие окрестности, а $g_{\alpha\beta}$ соответствующие склеивающие коциклы. Рассмотрим обратный образ этого расслоения $f^*\xi$ под действием отображения $f : M \longrightarrow B$. Доказать, что $f^*\xi$ действительно локально тривиальное расслоение, причем $(f^*E)_x \cong E_{f(x)}$, а $f^*g_{\alpha\beta}$, определённые формулой

$$f^*g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$

задают склеивающие коциклы для $f^*\xi$ для тривиализующего покрытия множествами $f^{-1}(U_\alpha)$.

Задача 6. Мы определили симметризацию абелева моноида так: симметризация абелева моноида M это абелева группа $K(M)$ и гомоморфизм абелевых моноидов $s : M \longrightarrow K(M)$, такие, что любой гомоморфизм абелевых моноидов $f : M \longrightarrow G$ абелева моноида M в абелеву группу G индуцирует единственный гомоморфизм абелевых групп $\tilde{f} : K(M) \longrightarrow G$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s"'] & & G \\
& K(M) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Доказать, что абелева группа $K(M)$, определённая таким образом, единственна.

Мы построили на лекции конструктивно симметризацию $K(M)$ абелева моноида M как $(M \times M)/\Delta(M)$, где $\Delta : M \longrightarrow M \times M$ диагональное вложение $x \overset{\Delta}{\mapsto} (x, x)$, вместе с каноническим отображением $s : M \longrightarrow K(M)$, определённым как $x \overset{s}{\mapsto} [(x, 0)]$. Доказать, что построенная нами симметризация удовлетворяет данному нами определению.

Задача 7. Найти симметризации следующих абелевых моноидов: неотрицательные целые числа со сложением, ненулевые целые числа с умножением.

Задача 8. Доказать, что для одноточечного топологического пространства pt верно $K(pt) \cong \mathbb{Z}$. Пусть $B = \{a, b\}$ двухточечное пространство с дискретной топологией. Найти $K(B)$.

Задача 9. Однозначно определённое отображение $j : B \longrightarrow pt$ индуцирует гомоморфизм $K(B) \overset{j^*}{\leftarrow} K(pt) \cong \mathbb{Z}$. Определим приведённую K-группу $\tilde{K}(B)$ как коядро отображения j^*, то есть $\tilde{K}(B) = \mathrm{Coker}\, j^* \cong K(B)/\operatorname{Im} j^*$, таким образом мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j^*} K(B) \longrightarrow \tilde{K}(B) \longrightarrow 0.$$

Пусть теперь x_0 произвольная точка топологического пространства B, тогда вложение $i : x_0 \hookrightarrow B$ индуцирует гомоморфизм $\mathbb{Z} \cong K(x_0) \xleftarrow{i^*} K(B)$. Доказать, что i^* является левым обратным к j^*, и имеют место зависящие от выбора точки x_0 изоморфизмы $\tilde{K}(B) \cong \mathrm{Ker}[K(B) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z}]$ и $K(B) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(B)$.

Задача 10*. Доказать, что $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $K_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.