**НМУ, Дополнительные главы геометрии. Листок 2.**
**Дифференциальные операторы в расслоениях.**
**Связности в расслоениях, кривизна. 11.10.2024.**

**Задача 1.** Пусть $M$ ориентированное риманово многообразие размерности $n$. Доказать, что для продолжения операции Ходжа $*$ на пространство комплекснозначных форм верны следующие утверждения:

a) $\bar{*} = *$,

b) $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ на $\Omega^k(M, \mathbb{C})$,

c) на компактном $M$ для дифференциальных форм $\alpha$, $\beta \in \Omega^k(M, \mathbb{C})$ их скалярное произведение равно

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha^* \bar{\beta}.$$

**Задача 2.** Пусть $V$ векторное пространство, $v \in V$. Определим линейное отображение $\varepsilon_v : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ как $\varepsilon_v(w) = v \wedge w$. Пусть $V$ евклидово. Определим контракцию $\iota_v : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$ с вектором $v$ следующим образом: для чисел $c \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V$ по определению $\iota_v c = 0$, для $w \in \Lambda V = V$ по определению $\iota_v w = (v, w) \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V$, а дальше контракция продолжается как дифференцирование градуированной алгебры $\Lambda^* V = \bigoplus\limits_{k=0} \Lambda^k V$, то есть $\iota_v(s + t) = \iota_v s + \iota_v t$, $\iota_v(s \wedge t) = (\iota_v s) \wedge t + (-1)^{\deg s} s \wedge (\iota_v t)$. Доказать, что

a) $\varepsilon_v^* = \iota_v$,

b) $(\varepsilon_v - \iota_v)^2$ является оператором умножения на число $-|v|^2$.

**Задача 3.** Пусть $A_1$ и $A_2$ дифференциальные операторы в расслоениях порядка $k$ и $l$. Проверить прямым вычислением, что $\sigma_{k+l}(A_1 A_2) = \sigma_k(A_1)\sigma_l(A_2)$.

**Задача 4.** Пусть $M$ многообразие размерности $n$. Для целых $0 \leqslant p, q$ рассмотрим расслоение $\xi = \bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M$. Его сечения — это тензоры типа $\binom{p}{q}$. Пусть $X$ векторное поле на $M$. Оно определяет производную Ли $L_X$, которая действует на этих тензорах. Рассмотрим комплексификацию $\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ расслоения $\xi$, производная Ли продолжается на него. Найти порядок дифференциального оператора $L_X : \Gamma(\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \longrightarrow \Gamma(\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ и его символ. В каких случаях этот оператор эллиптический?

**Задача 5.** (Для знающих комплексные аналитические многообразия.) Пусть $M$ комплексное аналитическое многообразие. Рассмотрим $\partial$ и $\bar{\partial}$ как дифференциальные операторы $\partial : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ и $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$. Найти для каждого порядок и символ. Являются ли они эллиптическими?

**Задача 6.** (Для знающих комплексные аналитические многообразия.) Как известно, в голоморфном расслоении $E$ над комплексным аналитическим многообразием $M$ корректно определён дифференциальный оператор $\bar{\partial}$ на сечениях $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M, E) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M, E)$. Найти его порядок и символ. Является ли он эллиптическим?

**Задача 7.** Пусть $\omega$ локальная 1-форма связности. Доказать, что $\omega$ преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{\omega} = T^{-1} \omega T + T^{-1} dT$.

**Задача 8.** Доказать, что матрица кривизны $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{F} = T^{-1} F T$, а потому «склеивается» в корректно определённую глобальную 2-форму со значениями в эндоморфизмах, $F \in \Omega^2(M, \operatorname{End} E)$.

**Задача 9.** Пусть $\nabla^1$ и $\nabla^2$ связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно.

Доказать, что операция $\nabla^1 \oplus \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \oplus \nabla^2(s_1 + s_2) = \nabla^1 s_1 + \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \oplus E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \oplus \nabla^2$.

Доказать, что операция $\nabla^1 \otimes \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \otimes \nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \otimes E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \otimes \nabla^2$.

Пусть $\nabla$ связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Пусть $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ естественное спаривание сечения расслоения $E$ и сечения двойственного ему расслоения $E^*$. Определим операцию $\nabla^*$ из условия, что тождество $d\langle s, t \rangle = \langle \nabla s, t \rangle + \langle s, \nabla^* t \rangle$ верно для любых $s \in \Gamma(M, E)$, $t \in \Gamma(M, E^*)$. Доказать, что это связность в $E^*$. Найти локальную 1-форму этой связности.

Связность в расслоении $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ можно ввести с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$ и предыдущих задач. Проверьте, что это то же самое, что определить связность формулой

$$(\nabla f)(s_1) = \nabla^2(f(s_1)) - f(\nabla^1 s_1),$$

где $f \in \Gamma(M, \mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $s_1 \in \Gamma(M, E_1)$.

Докажите, что описанные продолжения согласованных с метрикой связностей на прямые суммы, тензорные произведения и т.д. евклидовых (унитарных) расслоений снова будут согласованы с соответствующими метриками.

Найти, что происходит во всех описанных выше конструкциях с кривизной.

**Задача 10.** Пусть $\varphi : N \longrightarrow M$ гладкое отображение, а $\nabla^E$ связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Докажите, что равенство

$$\nabla^{\varphi^* E}(f \varphi^* s) = df \otimes \varphi^* s + f \varphi^*(\nabla^E s),$$

где $f \in C^\infty(N)$, $s \in \Gamma(M, E)$, определяет связность $\nabla^{\varphi^* E}$ на расслоении $\varphi^* E$ (обратный образ связности). Найи, как локальная 1-форма связности и кривизна связности $\nabla^{\varphi^* E}$ связаны с такими же объектами для связности $\nabla^E$.