**НМУ, Дополнительные главы геометрии. Листок 3.**
**Характеристические классы. Вычисление индекса. 25.10.2024.**

**Задача 1.** Рассмотрим два комплексных векторных расслоения $E_1$, $E_2$ над многообразием $M$. Доказать, что если $[E_1] = [E_2]$ в $K_{\mathbb{C}}(M)$, то $\operatorname{ch} E_1 = \operatorname{ch} E_2$.

**Задача 2.** Рассмотрим два комплексных векторных расслоения $E_1$, $E_2$ над многообразием $M$ и их изоморфизм $a$ вне компактного подмножества $K \subset M$. Пусть в $E_1$ выбрана эрмитова метрика $(\,,)_1$ и согласованная с ней связность $\nabla^1$, пусть в $E_2$ выбрана эрмитова метрика $(\,,)_2$ и согласованная с ней связность $\nabla^2$. Пусть $\rho$ такая гладкая функция на $M$, что $\rho = 0$ в $K$ и $\rho = 1$ вне $K'$, некоторого компакта, содержащего $K$. Рассмотрим

$$\tilde{\nabla}^1 s = \nabla^1 s + (\rho a^{-1} \nabla a) s.$$

Доказать, что $\tilde{\nabla}^1$ связность, согласованная с метрикой $(\,,)_1$, и вне $K'$ выполнено $\tilde{\nabla}^1 a = 0$.

**Задача 3.** Рассмотрим два комплексных векторных расслоения $E_1$, $E_2$ над многообразием $M$ и их изоморфизм $a$ вне компактного подмножества $K \subset M$. Рассмотрим также два комплексных векторных расслоения $E_1'$, $E_2'$ над многообразием $M$ и их изоморфизм $a'$ вне компактного подмножества $K' \subset M$. Доказать, что если $[E_1, E_2, a] = [E_1', E_2', a']$ в $K^c_{\mathbb{C}}(M)$, то $\operatorname{ch}_c[E_1, E_2, a] = \operatorname{ch}_c[E_1, E_2, a]$.

**Задача 4.** Выразить через образующие У упомянутые на лекциях характеристические классы ($i$-й класс Чженя, полный класс Чженя, $i$-й класс Понтрягина, полный класс Понтрягина, класс Эйлера, характер Чженя, класс Тодда).

**Задача 5.** Доказать, что для двумерной поверхности $\Sigma$ в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ выполнено

$$e(T\Sigma) = \left[\frac{1}{2\pi} K\, dS\right] \in H^2(\Sigma),$$

где $K$ гауссова кривизна, а $dS$ форма площади. Выведите с помощью этого теорему Гаусса-Бонне из теоремы Атьи-Зингера для $d + d^*|_{\Gamma(\xi^{even})}$.

**Задача 6.** Рассмотрим вещественное векторное расслоение $E$ с евклидовой метрикой и согласованной с ней связностью $\nabla$, кривизна которой имеет образующие У $y_1, \dots, y_p$. Выразить через них образующие У $y_1^*, \dots, y_p^*$ индуцированной связности $\nabla^*$ в двойственном расслоении $E^*$.

**Задача 7.** Выразить классы Понтрягина и Эйлера двойственного расслоения $E^*$ через классы Понтрягина и Эйлера исходного расслоения $E$.

**Задача 8.** Пусть $E_1$, $E_2$ два ориентированных вещественных векторных расслоения. Можно ли выразить $e(E_1 \oplus E_2)$ через $e(E_1)$ и $e(E_2)$?

**Задача 9.** Найти класс Эйлера $e(\mathbb{S}^4)$ для четырехмерной сферы, то есть класс Эйлера $e(T\mathbb{S}^4)$ её касательного расслоения. Найти его интеграл и сравнить с эйлеровой характеристикой.

**Задача 10.** Доказать, что касательное расслоение к чётномерной сфере не тривиально.