НМУ, Дополнительные главы геометрии. Листок 5.
Алгебра Клиффорда. 29.11.2024.

Задача 1. Пусть Q положительно определённая квадратичная форма на вещественном векторном пространстве V, а E снабжённый евклидовым скалярным произведением клиффордов модуль над $C(V,Q)$. Мы говорим, что модуль E самосопряжённый, если для любого элемента $a \in C(V,Q)$ верно тождество

$$c(a^*) = c(a)^*.$$

Доказать, что это равносильно тому, что для любого вектора $v \in V$ оператор $c(v) \in \operatorname{End} E$ кососимметричен относительно евклидова скалярного произведения в V, то есть $c(E) \in \mathfrak{so}(E)$.

Задача 2. Пусть Q квадратичная форма на вещественном векторном пространстве V. Мы определили для $v \in V$ и $\omega \in \Lambda V$ операцию $\varepsilon(v)\omega = v \wedge \omega$ и контракцию $\iota(v) : \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$ с ковектором $Q(v,\cdot) \in V^*$. Доказать, что для $v, w \in V$ верно равенство

$$\varepsilon(v)\iota(w) + \iota(w)\varepsilon(v) = Q(v,w).$$

Вывести из этого, что если для $v \in V$ и $\omega \in \Lambda V$ определить $c : V \longrightarrow \operatorname{End} \Lambda V$ как $c(v)\omega = \varepsilon(v)\omega - \iota(v)\omega$, то для $v, w \in V$ верно равенство

$$c(w)c(v) + c(v)c(w) = -2Q(v,w),$$

а поэтому c продолжается до гомоморфизма алгебр $c : C(V,Q) \longrightarrow \operatorname{End} \Lambda V$ и задаёт структуру клиффордова модуля на ΛV.

Задача 3. Мы определили символ $\sigma : C(V,Q) \longrightarrow \Lambda V$ формулой

$$\sigma(a) = c(a)1.$$

Доказать, что $\sigma(1) = 1$.

Задача 4. Мы определили отображение квантования $q : \Lambda V \longrightarrow C(V,Q)$ формулой

$$q(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = c_{i_1} \cdot \cdots \cdot c_{i_k},$$

где e_i ортонормированный относительно положительно определённой формы Q базис. Доказать, что q не зависит от выбора базиса и обратно к отображению σ. Вывести из этого, что $C(V,Q)$ и ΛV изоморфны как векторные пространства (но имеют разное умножение).

Задача 5. Пусть $C_i(V) \subset C(V)$ порождено произведениями i векторов. Доказать, что а) $C(V) = \bigcup\limits_i C_i(V)$, б) это задаёт на алгебре Клиффорда структуру фильтрованной алгебры, в) соответствующая градуированная алгебра $\mathrm{gr}C(V)$ это ΛV, г) символ σ является каноническим гомоморфизмом фильтрованной алгебры $C(V)$ в её градуированную алгебру $\mathrm{gr}C(V) \simeq \Lambda V$.

Задача 6. Доказать, что для $v \in V$ и $a \in C(V)$ верно тождество

$$\sigma([v,a]) = -2\iota(v)\sigma(a).$$

Задача 7. Доказать, что $C^2(V) = q(\Lambda^2 V)$ является подалгеброй Ли в $C(V)$.

Задача 8. Пусть квадратичная форма Q, определяющая алгебру Клиффорда $C(V)$, положительно определена. Мы определили $\tau : C^2(V) \longrightarrow \mathfrak{so}(V)$ формулой

$$\tau(a)v = [a,v],$$

где $a \in C^2(V)$ и $v \in V$. Доказать, что τ инъективно.

Задача 9. Пусть V ориентированное чётномерное векторное пространство с положительно определённой квадратичной формой Q, задающей алгебру Клиффорда. Доказать, что

$$T(\exp_\Lambda \sigma(a)) = 2^{-\frac{\dim V}{2}} \sqrt{\det \tau(a)},$$

где T интеграл Березина, $a \in C^2(V)$, $\sigma(a) \in \Lambda^2 V$. Предложить, исходя из этой формулы, практический способ вычисления пфаффиана. Применить его для пфаффиана кососимметрической матрицы 2×2.

Задача 10. Пусть квадратичная форма Q, определяющая алгебру Клиффорда $C(V)$, положительно определена. Рассмотрим векторы $v, w \in V$, такие, что $|v| = |w| = 1$, $v \perp w$. Доказать, что

$$\exp_C t(v \cdot w) = \cos t + \sin t \, v \cdot w.$$