НМУ, Дополнительные главы геометрии. Листок 6.
Клиффордовы модули, спиноры, операторы Дирака. 13.12.2024.

Задача 1. Доказать, что отображение $\exp : \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ сюръективно. Доказать, что $\mathrm{Spin}(V)$ на самом деле группа Ли. Доказать что

$$\mathrm{Spin}(2) \cong \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2), \quad \mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Задача 2. Определим группу $\mathrm{Pin}(V)$ как $\{v_1 \dots v_k \,|\, \forall i\, Q(v_i, v_i) = 1\} \subset C(V)$. Доказать, что $\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Pin}(V) \cap C^+(V)$.

Задача 3. Доказать, что для $v \in V$, $g \in \mathrm{Spin}(V)$ верно тождество

$$Q(gvg^{-1}) = Q(v),$$

то есть действие $\tau(g)v = gvg^{-1}$ группы $\mathrm{Spin}(V)$ на V ортогонально. Доказать, что получающийся гомоморфизм $\tau : \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow \mathrm{SO}(V)$ является гомоморфизмом групп Ли, то есть гладкий. Построить пример представления $\mathrm{Spin}(V)$, который не получается из представления $\mathrm{SO}(V)$.

Задача 4. Пусть V ориентированное евклидово пространство. Выберем в нём ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$. Расссмотрим $\Gamma = i^p e_1 \dots e_n \in C(V)$, где $p = \frac{n}{2}$ для чётного n, и $p = \frac{n+1}{2}$ для нечётного n.. Доказать, что для $v \in V$ верно свойство $\Gamma v \in V$, то есть можно рассматривать оператор $\Gamma : V \longrightarrow V$, называемый оператором хиральности. Доказать, что оператор хиральности не зависит от выбора базиса. Доказать, что для чётного n верно, что $\Gamma^2 = 1$, $\Gamma v = -v\Gamma$, а для нечётного n верно $\Gamma v = v\Gamma$.

Задача 5. Пусть V вещественное евклидово векторное пространство, а P выбранная в $V \otimes \mathbb{C}$ поляризация. Доказать, что $S^+ = \Lambda^+ P = \bigoplus \Lambda^{2k} P$ ортогонально к $S^- = \Lambda^- P = \bigoplus \Lambda^{2k-1} P$, а $S = S^+ \oplus S^- = \bigoplus \Lambda^k P = \Lambda P$ самосопряжённый клиффордов модуль.

Задача 6. Доказать, что L обобщённый лапласиан тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in C^\infty(M)$ выполнено

$$[[L, f], f] = -2|df|^2.$$

Можно ли выразить символ произвольного дифференциального оператора через коммутатор?

Задача 7. Доказать, что лапласиан Бохнера в расслоении E,

$$\Delta^E s = -\operatorname{tr}_g(\nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s), \quad s \in \Gamma(E),$$

является обобщённым лапласианом. Доказать, что если e_i локальный ортонормированный базис в сечениях расслоения E, то

$$\Delta^E = -\sum_i (\nabla^E_{e_i} \nabla^E_{e_i} - \nabla^E_{\nabla_{e_i} e_i}).$$

Доказать, что на расслоении $E = \Lambda T^*M$ лапласиан Бохнера, вообще говоря, отличается от лапласиана Ходжа $\Delta = (d + d^*)^2$.

Задача 8. Пусть L обобщённый лапласиан. Доказать, что а) на расслоении E существует связность ∇^E, такая, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ верно тождество

$$[L, f] = -2\langle \operatorname{grad} f, \nabla^E \rangle + \Delta f,$$

б) $L = \Delta^E + F$, где Δ^E построенный по связности ∇^E лапласиан Бохнера, а F некоторый эндоморфизм, $F \in \Gamma(\operatorname{End} E)$.

Задача 9. Пусть D оператор Дирака на расслоении $E = E^+ \oplus E^-$. Доказать, что равенство

$$[D, f] = c(df), \quad f \in C^\infty(M),$$

корректно определяет структуру расслоения клиффордовых модулей на E.

Задача 10. Доказать, что если ∇ связность на TM без кручения, то

$$\varepsilon \circ \nabla = d, \quad -\iota \circ \nabla = d^*,$$

где $\varepsilon : T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{k+1}T^*M$ внешнее умножение, $\varepsilon(\alpha \otimes \beta) = \alpha \wedge \beta$, а $\iota : T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{k-1}T^*M$ контракция $\iota(\alpha \otimes \beta) = \iota(\alpha)\beta$.

Пусть $E = E^+ \oplus E^-$, а A суперсвязность в E. Мы доказали на лекциях, что A_1 это обычная связность на E, сохраняющая градуировку, то есть для $s \in \Gamma(E^\pm)$ выполнено $A_1 s \in \Gamma(E^\pm)$. Доказать, что для $i \neq 1$ компоненты A_i это просто формы со значениями в эндоморфизмах, $A_i \in \Omega^i(M, \operatorname{End}^+ E)$ для нечётного i и $A_i \in \Omega^i(M, \operatorname{End}^- E)$ для чётного i.