

Независимый Университет, осень 2024

Г.Б. Шабат,

Тета-функции и решётки

Лекция 1 (13 сентября 2024) – план

Знакомство с действующими лицами

О названии курса. Тета-функции и решётки по отдельности. Разнообразие понимания обеих. Констатация разнообразных связей.

Главная Θ . Немотивированная $\Theta(Z|q)$. Её интерпретации – формальная и аналитическая.

Функциональное уравнение. Догадка о рассмотрении $Z \leftarrow q^2 Z$. Формальная интерпретация.

Мультипликативные и аддитивные аргументы. $(Z|q)$ и $z|\tau$. Связь аргументов $z|\tau$ с решёткой $\tau\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. О кольце целых функций как об обобщении кольца многочленов. Квазипериодические целые функции и их нули.

Нули $Z \mapsto \Theta(Z|q)$ и $z \mapsto \theta(z|\tau)$. Угаданные нули. Отсутствие других нулей (с помощью контурного интегрирования).

Отступление о теплопроводности. Функция $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} : (x, t) \mapsto \theta(x|it)$ и её физический смысл. Промежуточная тета $\vartheta(z|q) := \Theta(e^{2\pi iz}|q)$ как сверхбыстро сходящийся ряд Фурье. Уравнение теплопроводности и физический смысл начальных условий, которым удовлетворяет тета.

Разложение целых функций в произведение. Базельская задача и её решение Эйлером. Разложение синуса в произведение и его применение к вычислению $\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Множество нулей функции $z \mapsto \sin(\pi z)$ как вырожденная решётка $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. О разложении целых функции в произведение Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Мамфорд1988] Д. Мамфорд, *Лекции о тета-функции*. М., "Мир", 1988.