Независимый Университет, осень 2024

Г.Б. Шабат,

Тета-функции и решётки

Лекция 2 (20 сентября 2024) – план
Решётки и их "измерение"

О названии лекции. Широкое понимание слова "измерение": сопоставление измеряемому объекту либо числа, либо (в нашем случае) целой или целоморфной функции.

Главная диаграмма (исходная версия). Параллелограммы и решётки – все и с точностью до подобия.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}\mathrm{ar}^{+} \arrow[r, "/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})"] \arrow[d, "/\mathbb{C}^{\times}"] & \mathcal{L}\mathrm{at} \arrow[d, "/\mathbb{C}^{\times}"] \\
\mathcal{H} \arrow[r, "/\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})"] & \mathcal{M}_1(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Произведение Вейерштрасса для решётки. Обозначение для $\Lambda \in \mathcal{L}\mathrm{at}$

$$\sigma_\Lambda(z) := z \prod_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}} \right).$$

Ряды Эйзенштейна. Они (пока) *ненормированные* и объяснение её обозначения (в отличие от будущей нормированной) лектору неизвестно. При $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\mathrm{G}_k(\Lambda) := \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^{2k}}.$$

Логарифмическая производная произведения Вейерштрасса. Её интерпретация как "почти" производящую функцию для рядов Эйзенштейна.

$$\frac{\sigma'_\Lambda(z)}{\sigma_\Lambda(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{G}_k(\Lambda) z^{2k-1}.$$