Независимый Университет, осень 2024

Г.Б. Шабат,

Тета-функции и решётки

Лекция 3 (27 сентября 2024) – план
Функции $\sigma, \mathrm{W}, \wp$ и их (квази-)периодические свойства. Первые факторы по решёткам.

Панорама. Все три функции ввёл Вейерштрасс. Все зависят от "двух" аргументов – решётки и комплексной переменной – лежащей в той же комплексной плоскости, в которой лежит решётка. Нашу функцию W обычно обозначают ζ, добавляя "Вейерштрасса" – в отличие от ζ "Римана".

Снова σ. Из лекции 2 для $\Lambda \in \mathcal{L}\mathrm{at}$

$$\sigma_\Lambda(z) := z \prod_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}} \right).$$

Снова W. Снова рассматриваем логарифмическую производную, на которую будет две точки зрения: *ряды Лорана* (были) и *суммы (Миттаг-Леффлера)* по полюсам.

$$\mathrm{W}_\Lambda(z) := \frac{\sigma'_\Lambda(z)}{\sigma_\Lambda(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{G}_k(\Lambda) z^{2k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} \right).$$

Новая $\wp$. Обычно теория *эллиптических* (двояко-периодических или, точнее, Λ-периодических) начинается с неё.

$$\wp_\Lambda(z) := -\mathrm{W}'_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right),$$

$$\wp'_\Lambda(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

Обе Λ-периодичны.

Аддитивная квази-периодичность W.

$$[\lambda \in \Lambda \setminus 2\Lambda] \Longrightarrow \left[\mathrm{W}_\Lambda(z+\lambda) \equiv \mathrm{W}_\Lambda(z) + 2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right]$$

(Мультипликативная) квази-периодичность σ.

$$[\lambda \in \Lambda \setminus 2\Lambda] \Longrightarrow \left[\sigma_\Lambda(z+\lambda) \equiv -\mathrm{e}^{\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda}{2}\right)(2z+\lambda)} \sigma_\Lambda(z) \right].$$

$\wp_\Lambda$ и $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$. Этот фактор в размерности 1 – *алгебраическая* кривая. В старших размерностях общие такие факторы всего лишь *аналитичны.*

Дифференциальное уравнение Вейерштрасса.

$$\left(\wp'_\Lambda\right)^2 = 4\left(\wp_\Lambda\right)^3 - \mathrm{g}_2(\Lambda)\wp_\Lambda - \mathrm{g}_3(\Lambda),$$

где
$$g_2 := 60G_2 \text{ и } g_3 := 140G_3.$$

Отступление: связь с KdV.
$$\wp''' = 12\wp\wp'.$$

О выводе дифференциального уравнения Вейерштрасса. Можно было установить
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_2z^2 + 5G_3z^4 + \dots,$$
$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_2z + 20G_3z^3 + \dots,$$
Работаем в $\mathbb{Q}[G_2, G_3, G_4, \dots]((z))$ и применяем теорему Лиувилля.

Поразительное следствие. $G_{>3} \in \mathbb{Q}[G_2, G_3]$.

Связи с плоской кубикой. Дифференциальное уравнение Вейерштрасса задаёт *униформизацию* аффинной кривой
$$\mathbb{C} \setminus \Lambda \xrightarrow{(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)} \mathbf{E}_{\dot\Lambda},$$
где
$$\mathbf{E}_{\dot\Lambda} : Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$$
и проективной кривой
$$\mathbb{C} \xrightarrow{(\wp_\Lambda : \wp'_\Lambda : 1)} \mathbf{E}_\Lambda,$$
где
$$\mathbf{E}_\Lambda : Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3.$$

Одно применение. Групповая структура на $\frac{\mathbb{C}^+}{\Lambda}$ и на плоской кубике $\mathbf{E}_\Lambda$.