Независимый Университет, осень 2024

Г.Б. Шабат,

Тета-функции и решётки

Лекция 4 (4 октября 2024) – план

Квазипериодические функции.

Множества квазипериодических функций. Введём в кольце целых функций подмножество *квазипериодических*

$$\mathcal{O}[\mathbb{C}] \supset \mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\binom{\lambda_1}{\lambda_2};\binom{M_1,N_1}{M_2,N_2}} := \Big\{ f | f\left(z+\lambda_{1,2}\right) \equiv \mathrm{e}^{M_{1,2}z+N_{1,2}} f(z) \Big\}.$$

Здесь $\vec{\lambda} \in \mathsf{Par}^+,\ M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{C}$.

Переобозначения:

$$f_\Lambda(z) = f_{\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle}(z) =: f(z|\lambda_1, \lambda_2\};$$
$$f(z|1,\tau) =: f(z|\tau).$$

Примеры. Знаем

$$\theta(z+1|\tau) = \theta(z|\tau),$$
$$\theta(z+\tau|\tau) = \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(\tau+2z)}\theta(z|\tau),$$

так что

$$\boxed{\theta(\_|\tau) \in \mathcal{Q}_{\binom{\tau}{1};\binom{-2\pi\mathrm{i},\ -\pi\mathrm{i}\tau}{0,\quad\ 0}}}.$$

Далее, для $\lambda_{1,2} \in \Lambda \setminus 2\Lambda$

$$\sigma_\Lambda(z+\lambda_i) \equiv -\mathrm{e}^{\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)(2z+\lambda_i)}\sigma_\Lambda(z) \equiv \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)(2z+\lambda_i)},$$

поэтому для любых нечётных образующих λ_1, λ_2 решётки Λ

$$\boxed{\sigma_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle} \in \mathcal{Q}_{\binom{\lambda_1}{\lambda_2};\binom{2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_1}{2}\right),\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\lambda_1+\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_2}{2}\right),\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\lambda_2+\pi\mathrm{i}}}}$$

Обобщённые соотношения Лежандра. Обратим внимание на определители "матриц" из двух последних формул

$$\begin{pmatrix} \tau & -2\pi\mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \\ \lambda_2 & 2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

См. далее.

Нули квазипериодических функций. Назовём для решётки $\Lambda = \langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ и точки $O \in \mathbb{C}$ *фундаментальным параллелограммом с вершиной* O множество

$$\Pi_O(\lambda_1, \lambda_2) := O + \big\{ t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 \mid t_1, t_2 \in [0,1] \big\}.$$

Для ненулевой квазипериодической функции $f \in \mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}} \setminus \{0\}$ вершина O будет выбираться так, чтобы у неё *на границе фундаментального параллелограмма не было нулей,*

$$\big[z \in \partial\Pi_O(\lambda_1, \lambda_2)\big] \Longrightarrow [f(z) \neq 0].$$

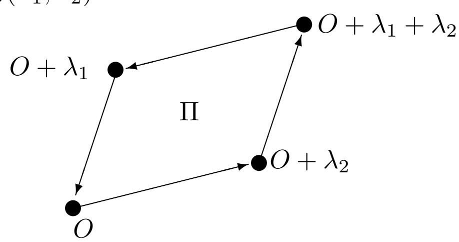
Факт. *Любая ненулевая функция из пространства* $\mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}}$ *имеет одно и то же количество нулей (с кратностью!) в любом параллелограмме решётки* $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$.

Обозначим это число $\boxed{\deg\mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}}}$.

Теорема. *Для любых* $\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}$

$$\deg\mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}}=\begin{cases}0, \text{ если } \lambda_1M_2-\lambda_2M_1\notin 2\pi\mathrm{i}\mathbb{N}\\ \frac{\lambda_1M_2-\lambda_2M_1}{2\pi\mathrm{i}}, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Доказательство. Для любой квазипериодической $f\in\mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}}$ по теореме Руше для параллелограмма $\Pi=\Pi_O(\lambda_1,\lambda_2)$



имеем

$$2\pi\mathrm{i}\#\{z\in\Pi\mid f(z)=0\}=\int_{\partial\Pi}\frac{\mathrm{d}f}{f}=$$

$$=\int_O^{O+\lambda_2}\frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}+\int_{O+\lambda_1}^{O+\lambda_1+\lambda_2}\frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}+\int_{O+\lambda_1+\lambda_2}^{O+\lambda_1}\frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}+\int_{O+\lambda_1}^{O}\frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}=$$

$$=\int_O^{O+\lambda_1}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{f'(z+\lambda_2)}{f(z+\lambda_2)}\right)\mathrm{d}z-\int_O^{O+\lambda_2}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{f'(z+\lambda_1)}{f(z+\lambda_1)}\right)\mathrm{d}z.$$

Поскольку $\frac{f'(z+\lambda_2)}{f(z+\pi_j)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log f(z+\pi_j)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\left(\mathrm{e}^{M_jz+N_j}f(z)\right)=M_j+\frac{f'(z)}{f(z)}$, имеем

$$2\pi\mathrm{i}\#\{z\in\Pi\mid f(z)=0\}=-\int_O^{O+\lambda_2}M_1\mathrm{d}z+\int_O^{O+\lambda_1}M_2\mathrm{d}z=\lambda_1M_2-\lambda_2M_1.\blacksquare$$

Случаи $f=\theta(\_|\tau)$ **и** $f=\sigma_\Lambda$**.** Здесь вышеупомянутые определители превращаются в

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & M_1\\ \lambda_2 & M_2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\tau & -2\pi\mathrm{i}\\ 1 & 0\end{pmatrix}=2\pi\mathrm{i},$$

что мы и так знаем (согласно Теореме, *в любом фундаментальном параллелограмме тета-функция имеет ровно один ноль*, а это было проверено в одной из предыдущих лекций), и в

$$\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & M_1\\ \lambda_2 & M_2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\lambda_1 & 2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\\ \lambda_2 & 2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)\end{pmatrix}=2\pi\mathrm{i}.$$

Половина последнего равенства, то есть

$$\boxed{\lambda_1\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)-\lambda_2\mathrm{W}_\Lambda\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)=\pi\mathrm{i}}$$

представляет собой (несколько видоизменённое) классическое *соотношение Лежандра.* Его вывод и связь с эллиптическими интегралами см. в задачах.

Умножение на экспоненту квадратичного многочлена. Средствами элементарной математики проверяется

$$\boxed{\left(z \mapsto \mathrm{e}^{Az^2+Bz}\right) \mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M},\vec{N}} = \mathcal{Q}_{\vec{\lambda};\vec{M}+2A\vec{\lambda},\vec{N}+\begin{pmatrix} A\lambda_1^2+B\lambda_1 \\ A\lambda_2^2+B\lambda_2 \end{pmatrix}}}$$

Важное наблюдение. *Умножением на подходящую экспоненту квадратичного многочлена можно убить один из периодов.*

Характеристики. Вводим

$$ab \in \{00, 01, 10, 11\}$$

и рассматриваем значения (главной) функции Вейерштрасса в полупериодах:

$$\boxed{\mathrm{e}_{ab}(\tau) := \wp\left(\frac{a\tau+b}{2}\right)}$$

Отступление для знакомых с детскими рисунками и функцицями Белого. Введя

$$\ddot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0,1\},$$

естественно назвать

$$\dddot{\beta}_\infty := \frac{\mathrm{e}_{01}-\mathrm{e}_{11}}{\mathrm{e}_{10}-\mathrm{e}_{11}} : \mathcal{H} \longrightarrow \ddot{\mathbb{C}}$$

универсальной неразветвлённой функцией Белого. Она представляет собой универсальную накрывающую дважды проколотой (аффинной) комплексной прямой. Порядок индексов 01, 10, 11 выбран случайно; зависимость от него будет обсуждаться в последующих лекциях.

Возвращение к уравнению Вейерштрасса. Напомнив обозначения рядов Эйзенштейна

$$\mathrm{g}_2(\tau) := 60 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^4},$$

$$\mathrm{g}_3(\tau) := 140 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^6},$$

и уравнения Вейерштрасса

$$\wp'(z|\tau)^2 = 4\wp(z|\tau)^3 - \mathrm{g}_2(\tau)\wp(z|\tau) - \mathrm{g}_3(\tau),$$

перепишем его:

Теорема. *Имеет место разложение на множители*

$$\wp'(z|\tau)^2 = 4 \prod_{ab\in\{01,10,11\}} \big(\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{ab}(\tau)\big).$$

Эта теорема доказывается во всех учебниках по эллиптическим функциям и ясна всякому, знакомому с групповой структурой на кривых рода 1.

Следствие. *Кубический многочлен от $\wp(z|\tau)$ в правой части теоремы не* *имеет кратных корней.*

Функции σ_{ab}. Анализ критических точек показывает, что *существуют целые функции $z \mapsto \sigma_{ab}(z|\tau)$, удовлетворяющие равенствам*

$$\boxed{\wp(z|\tau) - \mathrm{e}_{ab}(\tau) = \frac{\sigma_{ab}(z|\tau)^2}{\sigma(z|\tau)^2}} \qquad (\bigstar)_{ab}$$

Эти функции определены равенством с точностью до знака, который традиционно выбирается в терминах коэффициента при z в разложении Тейлора. См. задачи.

Фиксировав τ и переобозначив $\sigma =: \sigma_{00}$, распишем уравнения $(\bigstar)_{ab}$:

$$\wp(z) - \mathrm{e}_{01} = \frac{\sigma_{01}(z)^2}{\sigma_{00}(z)^2}, \qquad (\bigstar)_{01}$$

$$\wp(z) - \mathrm{e}_{10} = \frac{\sigma_{10}(z)^2}{\sigma_{00}(z)^2}, \qquad (\bigstar)_{10}$$

$$\wp(z) - \mathrm{e}_{11} = \frac{\sigma_{11}(z)^2}{\sigma_{00}(z)^2}. \qquad (\bigstar)_{11}$$

Попарно вычитая их с целью уничтожения $\wp(z)$, получим
$(\bigstar)_{01} - (\bigstar)_{10}$:

$$\mathrm{e}_{10} - \mathrm{e}_{01} = \frac{\sigma_{01}(z)^2 - \sigma_{10}(z)^2}{\sigma_{00}(z)^2},$$

$(\bigstar)_{01} - (\bigstar)_{11}$:

$$\mathrm{e}_{11} - \mathrm{e}_{01} = \frac{\sigma_{01}(z)^2 - \sigma_{11}(z)^2}{\sigma_{00}(z)^2}.$$

Умножая эти равенства на $\sigma_{00}(z)^2$, получим *два квадратичных соотношения между функциями $\sigma_{00}, \sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11}$*! Получаем вложение

$$(\sigma_{00} : \sigma_{01} : \sigma_{10} : \sigma_{11}) : \frac{\mathbb{C}}{\langle 2\tau, 2\rangle} \hookrightarrow \mathbf{P}_3(\mathbb{C}),$$

образ которого является *пересечением двух квадрик.*

Список литературы

[ГурКур1968] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций.* М., "Наука", 1968.