Независимый Университет, осень 2024

Г.Б. Шабат,

Тета-функции и решётки

К лекция 5 (11 октября 2024) – предварительный план

Модулярные формы, тета-функции и решётки.

В основном по [**Серр1972**]

Модулярные формы.

Основное определение (см. [**Серр1972**], стр. 132). *Модулярная формы веса* $2k$ – это такая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}(\mathcal{LAT}^+)$, что $\forall m \in \mathbb{C}^\times$

$$F(m\Lambda) \equiv \frac{F(\Lambda)}{m^{2k}}$$

Уже известные примеры: ряды Эйзенштейна G_k при $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Альтернативное определение (ibid, стр. 128), здесь $f \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, удовлетворяющее

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \equiv (c\tau + d)^{2k} f(\tau)$$

для любых $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих $ad - bc = 1$. Это определение определение хуже основного.

Рабочее определение (ibid, стр. 129). С учётом образующих группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ последнее соотношение равносильно

$$\begin{cases} f(\tau + 1) \equiv f(\tau) \\ f\left(-\dfrac{1}{\tau}\right) \equiv \tau^{2k} f(\tau). \end{cases}$$

Разложение в ряды Фурье. Вводим $\boxed{q := \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \tau}}$ и с учётом $f(\tau + 1) \equiv f(\tau)$ разлагаем любую модулярную форму в ряд Фурье:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^{2n}$$

В зависимости от ограничений на индексы суммирования различают формы

$n \in \mathbb{Z}$ – *слабо* модулярные (не встретятся),

$n >> -\infty$ – *мероморфные*,

$n \in \mathbb{N}$ – *голоморфные*,

$n \in \mathbb{N}_{>\nvdash}$ – *параболические.*

Из рядов Эйзенштейна G_k изготовляются дальнейшие примеры.

Особо важный пример. В дальнейшем увидим, что

$$q^{2n} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{24} = q^2 - 24q^4 + 252q^6 - 1472q^8 \dots$$

– (единственная с точностью до пропорциональности) параболическая форма веса 12.

Она пропорциональна

$$\boxed{\Delta := \mathrm{g_2}^3 - 27\mathrm{g_3}^2 =_{\text{Якоби}} (2\pi)^{12} q^{2n} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^{24}} = \operatorname{discrim}(4X^3 - \mathrm{g}_2 X - \mathrm{g}_3, X).$$

Отступление о particio numerorum. Эйлер ввёл для $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\mathrm{p}(n) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \#\big\{(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{N}_{>0}^{\ell} \big| x_1 + \cdots + x_\ell = n, x_1 \geq \cdots \geq x_\ell\big\},$$

положил

$$\mathrm{p}(0) := 1$$

и доказал

$$Э(Q) := \boxed{\sum_{n=0}^{n} \mathrm{p}(n) Q^n = \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty} \big(1 - Q^m\big)}}.$$

Оказалось, что произведение[1]

$$\Psi_{01}(Z|Q) := \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - Q^m Z\big)\big(1 - Q^{m-1} Z^{-1}\big)\Big)$$

разлагается в сумму

$$\Psi_{01}(Z|Q) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} Q^{\frac{n(n+1)}{2}} Z^n}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-Q^m)},$$

и потому "почти-"тета-функция

$$\Phi_{01}(Z|q) := \Psi_{01}(Z|q^2)$$

удовлетворяет равенству

$$\Phi_{01}(Z|q) := \boxed{\prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - q^{2m} Z\big)\big(1 - q^{2m-2} Z^{-1}\big)\Big) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)} Z^n}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})}}.$$

Теперь можно ввести одну из *тета-функций с характеристиками*

$$\boxed{\Theta_{01}(Z|q) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)} Z^n}$$

и разложить её в произведение

$$\boxed{\Theta_{01}(Z|q) = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{2m}) \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - q^{2m} Z\big)\big(1 - q^{2m-2} Z^{-1}\big)\Big)}.$$

Это разложение после переименования

$$\boxed{\Theta_{11}(Z|q) := \Theta(Z|q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n}$$

[1]Его можно понимать как формальное в $\mathbb{Q}[Z, Z^{-1}][[Q]]$ или как сходящееся при определённых $Q, Z \in \mathbb{C}$.

хорошо воспринимается вместе с *тройным тождеством Якоби*

$$\Theta_{11}(Z|q) = \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n = \boxed{\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)} \prod_{m=1}^{\infty}\left(\left(1+q^{2m-1}Z\right)\left(1+q^{2m-1}Z^{-1}\right)\right)}$$

В аддитивных переменных две (из четырёх!) введённые тета-функции с характеристиками связаны между собой соотношением

$$\boxed{\theta_{01}(z|\tau) = \theta_{11}\left(z+\frac{1}{2}\middle|\tau\right)}.$$

Алгебра модулярных форм. Ibid, стр. 140. Введём пространства

$$\mathsf{M}_k := \{\text{модулярные формы веса } 2k\},$$
$$\mathsf{M}_k^0 := \{\text{параболические формы веса } 2k\}.$$

Нули и полюсы. Ibid, стр. 136 и 137: для $f \in \mathsf{M}_k \setminus \{0\}$ при соответствующих ограничениях

$$v_\infty(f) + \sum_{P\in\frac{\mathcal{H}}{\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})}} \frac{1}{e_P(f)} = \frac{k}{6},$$

или, иначе,

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_{\mathrm{i}}(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \sum_{P\in\frac{\mathcal{H}}{\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})}\setminus\{\mathrm{i},\rho\}} \frac{1}{e_P(f)} = \frac{k}{6},$$

Проверяется контурным интегрированием.

Структура M_k и M_k^0. Ibid, стр. 140, теорема 4:
$[k<0 \text{ или } k=1] \Longrightarrow [\mathsf{M}_k = \{0\}]$;
$[k\in\{0,2,3,4,5\}] \Longrightarrow [\mathsf{M}_k = \langle 1\rangle, \langle \mathrm{G}_{2,3,4,5}], \mathsf{M}_k^0 = \{0\}$.
Умножение на Δ определяет изоморфизм
$\cdot\Delta : \mathsf{M}_{k-6} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{M}_k^0$.

Следствие 1. *При* $k \geq 0$

$$\dim \mathsf{M}_k = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{k}{6} \right\rfloor, & \text{если } k \equiv 1 \mod 6, \\ \left\lfloor \dfrac{k}{6} \right\rfloor + 1, & \text{если } k \not\equiv 1 \mod 6. \end{cases}$$

Следствие 2. $\mathsf{M}_k = \langle \mathrm{G}_2^\alpha \mathrm{G}_3^\beta \mid \alpha,\beta\in\mathbb{N}, 2\alpha+3\beta = k\rangle$.

Модулярный j**-инвариант.** Ibid, стр. 142:

$$\boxed{\mathrm{j} := 1728\frac{\mathrm{g}_2^3}{\Delta}} = 12^3\frac{\mathrm{g}_2^3}{\mathrm{g}_{2_3} - 27\mathrm{g}_{3_2}}$$

Ibid, стр. 144:

$$\mathrm{j} = \frac{1}{q^2} + 744 + 196884q^2 + 21493760q^4 + \ldots$$

(Не из Серра). Коэффициенты этого разложения поразительным образом связаны с размерностями неривoдимых представлений **МОНСТР**а, наибольшей из 26 *спорадических простых групп.*

Другие разложения в ряды. Ibid, стр. 140:

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} =: 1 - \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mathrm{B}_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Важно: $\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \mathrm{B}_k \pi^{2k}$.

Ibid, стр. 146:

$$\boxed{\mathrm{G_k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi \mathrm{i})^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^{2n}},$$

где $\sigma_j(n) := \sum_{d|n} d^j$.

Нормированные ряды Эйзенштейна. Ibid, стр. 147:

$$\boxed{\mathrm{E_k}(\tau) := \frac{\mathrm{G_k}(\tau)}{2\zeta(2k)}}$$

Переразложение

$$\boxed{\mathrm{E_k}(\tau) \in 1 + \mathbb{Q} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^{2n}}$$

<u>Примеры</u>.

$$\mathrm{E}_2(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^{2n}$$

$$\mathrm{E}_3(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^{2n}$$

$$\mathrm{E}_4(\tau) = 1 - 264 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^{2n}$$

$$\mathrm{E}_5(\tau) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) q^{2n}$$

$$\mathrm{E}_6(\tau) = 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) q^{2n}$$

$$\mathrm{E}_7(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{13}(n) q^{2n}$$

Ibid, стр. 48: поразительные применения.
Из

$$\mathrm{E}_2^2 = \mathrm{E}_4,$$

$$\mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_5$$

вытекают соотношения, которые иначе совершенно непонятно (лектору, ГБШ) как устанавливать и доказывать:

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_5(m-n),$$

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(m-n).$$

Список литературы

[Серр1972] Ж.-П. Серр, *Курс арифметики.* М., "Мир", 1972.